

ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΡΕΥΝΩΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ
ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΝΕΟΤΕΡΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ
ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ
2021

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ Γ. ΚΟΝΤΟΠΟΥΛΟ
ΚΑΙ ΤΟΝ ΔΙΕΥΘΥΝΟΝΤΑ ΤΟ ΚΕΑΕΜ Π.Α. ΠΑΤΣΗ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 2021

ΝΕΟΤΕΡΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ
2021

Αποτελέσματα ερευνών του Κέντρου Ερευνών
Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
της Ακαδημίας Αθηνών

Επιμέλεια: Πάνος Πάτσης, Διευθύνων

Γεώργιος Κοντόπουλος, Ακαδημαϊκός

ΑΘΗΝΑ 2021
ISSN: 2585-3767

Πρόλογος

Παρουσιάζουμε για έκτη χρονιά χαρακτηριστικά αποτελέσματα από ερευνητικές εργασίες του Κέντρου Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (ΚΕΑΕΜ) στην ελληνική γλώσσα, απευθυνόμενοι σε ένα ευρύτερο κοινό. Οι επιστημονικές εργασίες του ΚΕΑΕΜ δημοσιεύονται κατά κύριο λόγο σε έγκριτα διεθνή αστρονομικά περιοδικά με κριτές και κατά δεύτερο λόγο σε τόμους με πρακτικά συνεδρίων. Δεδομένου ότι απευθύνονται στη διεθνή επιστημονική κοινότητα που ειδικεύεται στους αντίστοιχους τομείς έρευνας, οι δημοσιεύσεις αυτές γίνονται στην αγγλική γλώσσα. (Ο κατάλογος των δημοσιεύσεων του έτους **2020** βρίσκεται στις σελίδες 95-98 του παρόντος τεύχους). Στο παρόν τεύχος συγκεντρώσαμε μια σειρά άρθρων που συνοψίζουν τα συμπεράσματα της έρευνας που διεξάγεται στο ΚΕΑΕΜ. Τα άρθρα αυτά έχουν εν μέρει έναν εκλαϊκευτικό χαρακτήρα και απευθύνονται όχι μόνο σε ειδικούς αλλά και σε όσους ενδιαφέρονται για τη σύγχρονη αστρονομική έρευνα.

Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (ΚΕΑΕΜ)

Το Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (ΚΕΑΕΜ) διεξάγει ανταγωνιστική έρευνα διεθνώς στους ακόλουθους τομείς:

- Δυναμική και μορφολογία γαλαξιών
- Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα (πολυπλοκότητα και χάος)
- Ηλιακή Φυσική
- Μαγνητοϋδροδυναμική
- Κοσμολογία και Βαρύτητα

Οι εργασίες του ΚΕΑΕΜ βασίζονται κυρίως στη παραγωγή θεωρητικών μοντέλων και στη σύγκριση τους με σύγχρονα παρατηρησιακά δεδομένα από γήινα και διαστημικά τηλεσκόπια. Με την έρευνα που διεξάγεται στο ΚΕΑΕΜ τα τελευταία χρόνια, επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις σε καίρια σύγχρονα ερωτήματα, όπως α) η δυναμική των σπειρών στο δικό μας Γαλαξία, β) η αναπαραγωγή της τρισδιάστατης δομής του μαγνητικού πεδίου στον Ήλιο και η πρόβλεψη της ηλιακής δραστηριότητας και του διαστημικού καιρού, γ) η κατανόηση του περιβάλλοντος και των μηχανισμών ενίσχυσης μαγνητικών πεδίων και εκπομπής σε συμπαγή αντικείμενα (π.χ. αστέρες νετρονίων ή ενεργοί γαλαξιακοί πυρήνες), δ) η κατανόηση της φύσης της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας που οδηγούν την κοσμολογική εξέλιξη του Σύμπαντος.

Στις εργασίες αυτές, εκτός από το μόνιμο ερευνητικό και τεχνικό προσωπικό, συμβάλλουν αποφασιστικά και οι μεταδιδακτορικοί επιστημονικοί μας συνεργάτες (από την Ελλάδα, και επισκέπτες από το εξωτερικό), καθώς και οι διδακτορικοί φοιτητές (από πανεπιστήμια της Ελλάδας και του εξωτερικού) που εκπονούν τη διατριβή τους υπό την επίβλεψη του ερευνητικού προσωπικού του ΚΕΑΕΜ. Οι ερευνητές του ΚΕΑΕΜ παρέχουν επίσης δωρεάν διδακτικό έργο σε μεταπτυχιακά κυρίως τμήματα του Πανεπιστημίου Αθηνών, στον τομέα Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής. Επίσης καλούνται συχνά να διδάξουν σε σεμινάρια πανεπιστημίων και ερευνητικών κέντρων στην Ελλάδα και το εξωτερικό.

Το ΚΕΑΕΜ, σκοπεύοντας στη συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης τόσο των ερευνητών, όσο και των μεταπτυχιακών φοιτητών σε σύγχρονα θέματα έρευνας, οργανώνει εβδομαδιαία σεμινάρια, που χρηματοδοτούνται εν μέρει από την Ακαδημία Αθηνών. Στα σεμινάρια συμμετέχουν ως ομιλητές, ακαδημαϊκοί, καθηγητές και διακεκριμένοι επιστήμονες από διάφορα Πανεπιστήμια και Ερευνητικά Κέντρα της Ελλάδος και του Εξωτερικού. Τα σεμινάρια αυτά τα παρακολουθεί η ευρύτερη κοινότητα των φοιτητών, πανεπιστημιακών και ερευνητών που εργάζονται σε σχετικά θέματα. Κατά το 2020, πραγματοποιήθηκαν 7 μόνον σεμινάρια στην αίθουσα σεμιναρίων του ΚΕΑΕΜ, λόγω της πανδημίας του COVID-19. Τα τελευταία χρόνια το ΚΕΑΕΜ έχει οργανώσει πέντε διεθνή συνέδρια σε θέματα Γαλαξιακή Δυναμικής, Ηλιακής Φυσικής και Βαρύτητας. Συχνά οι ερευνητές δίνουν σειρά εκλαϊκευτικών ομιλιών, ενώ κατά το διεθνές έτος Αστρονομίας (2009), κατά το διεθνές έτος Φωτός (2015) καθώς και

με την ευκαιρία της συμπλήρωσης 100 χρόνων από την ίδρυση της Διεθνούς Αστρονομικής Ενώσεως (2019), διοργανώθηκαν ειδικές σειρές ομιλιών καθ' όλη τη διάρκεια του έτους στην Ανατολική αίθουσα του κτηρίου της Ακαδημίας.

Η επιστημονική παραγωγή του ΚΕΑΕΜ (αριθμός επιστημονικών δημοσιεύσεων, συνεργασίες των ερευνητών και προσκλήσεις στο εξωτερικό, χρηματοδοτήσεις, διοργάνωση συνεδρίων και σεμιναρίων, εκδηλώσεις επιμόρφωσης και διάδοσης της αστρονομίας στο κοινό) κατατάσσουν το ΚΕΑΕΜ ανάμεσα στα πλέον παραγωγικά ερευνητικά κέντρα που δραστηριοποιούνται στο χώρο της Αστρονομίας και παράγοντα προβολής της χώρας μας διεθνώς. Κατά το 2020 το Κέντρο μας δημοσίευσε 49 επιστημονικές εργασίες, εκ των οποίων 30 σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά υψηλού κύρους με κριτές. Επίσης ερευνητές του επιμελήθηκαν την έκδοση του αντίστοιχου με τον παρόντα τόμο των “Νεότερων εξελίξεων στην Αστρονομία” για το 2019, καθώς και την έκδοση του περιοδικού “Ίππαρχος” της Ελληνικής Αστρονομικής Εταιρείας. Οι ερευνητές του ΚΕΑΕΜ έδωσαν 20 ομιλίες σε διεθνή συνέδρια και ερευνητικά ιδρύματα (οι περισσότερες από αυτές κατόπιν προσκλήσεως). Τέλος συμμετείχαν στη διοργάνωση 2 διεθνών συνεδρίων και επιστημονικών συναντήσεων.

Π. Πάτσης, Διευθυντής Ερευνών, Διευθύνων το ΚΕΑΕΜ

Γ. Κοντόπουλος, Ακαδημαϊκός, Επόπτης του ΚΕΑΕΜ

Στοιχεία του Κέντρου

Σωρανού Εφεσίου 4, Αθήνα, 11527

Ιστοσελίδα: <http://astro.academyofathens.gr>

E-mail: keaem@academyofathens.gr

Επόπτης του Κέντρου είναι ο Ακαδημαϊκός κ. Γεώργιος Κοντόπουλος, η δε σύνθεση του προσωπικού κατά το **2020** ήταν:

- Πάτσης Πάνος, Διευθύνων, Ερευνητής Α΄
- Κοντόπουλος Ιωάννης, Ερευνητής Α΄
- Βασιλάκος Σπύρος, Ερευνητής Α΄ (διευθυντής ΙΑΑΔΕΤ, Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών, από τον Σεπτέμβριο του 2018)
- Γεωργούλης Μανώλης, Ερευνητής Α΄
- Γοντικάκης Κωνσταντίνος, Ερευνητής Α΄
- Χαρσούλα Μιρέλλα, Ερευνήτρια Β΄
- Μεταδιδακτορικοί Ερευνητές: Τζέμος Αθανάσιος (συνεργασία με Γ. Κοντόπουλο)
- Επιστημονικοί Συνεργάτες: Δάρα Ελένη, Ζαχαριάδης Θεοδόσης, Τριτάκης Βασίλειος
- Επισκέπτες Ερευνητές: Παπαδόπουλος Παντελής
- Τεχνικός Υπεύθυνος: Ζούλιας Μανώλης
- Υποψήφιοι Διδάκτορες: Ζουλούμη Κωνσταντίνα
- Φοιτητές που εκπονούν την πτυχιακή τους εργασία στο ΚΕΑΕΜ: Αθανασίου Ευστάθιος (ΕΚΠΑ) και Πάστρας Σταύρος (ΕΚΠΑ)

Περιεχόμενα

Α'	Μία συνοπτική έκθεση της Φιλοσοφίας της Φυσικής και των Μαθηματικών / Γεώργιος Κοντόπουλος	1
Β'	Ο ρόλος του δυναμικού στην Κβαντική Μηχανική Bohm / Γεώργιος Κοντόπουλος και Αθανάσιος Τζέμος	15
Γ'	Η τροχιακή δομή των γαλαξιακών ράβδων: Σημερινή γνώση και ανοιχτά ερωτήματα / Πάνος Πάτσης	35
Δ'	Κβαντική συμβολή: πραγματικότητα ή απλώς μια ψευδαίσθηση του ανιχνευτή; / Ιωάννης Κοντόπουλος	43
Ε'	Προεργασία για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” ως προς την εκδήλωση γεγονότων ηλιακών ενεργητικών σωματιδίων / Μανώλης Γεωργούλης	59
ΣΤ'	Μελέτη του λόγου εντάσεων σε περιοχή στεμματικής οπής / Μυρτώ Κωλέττη και Κωνσταντίνος Γοντικάκης	79
Ζ'	Ο Μηχανισμός δυναμικής αντιστοίχισης σε ένα δυναμικό τύπου Καλντέρα / Ματθαίος Κατσάνικας	87
Η'	Δημοσιεύσεις του Κέντρου Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών για το 2020	95

Α' Μία συνοπτική έκθεση της Φιλοσοφίας της Φυσικής και των Μαθηματικών

Γεώργιος Κοντόπουλος

Α'.1 Εισαγωγή

Ένα βασικό ερώτημα που απασχολεί τους επιστήμονες είναι η σχέση Φυσικής και Μαθηματικών. Η εμπειρία μας που προέρχεται από την παρατήρηση και το πείραμα μας υποδεικνύει ότι η φύση διέπεται από νόμους και οι νόμοι αυτοί είναι παγκόσμιοι. Οι επιστήμονες από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, έχουν διατυπώσει πολλούς φυσικούς νόμους. Οι νόμοι αυτοί διατυπώνονται συνήθως με μαθηματικούς τύπους, π.χ. οι νόμοι του Νεύτωνα και του Einstein, οι νόμοι του Ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις Maxwell), οι νόμοι της Κβαντομηχανικής κλπ.

Όχι πάντα όμως. Π.χ. το ότι υπάρχουν στερεά σώματα, υγρά και αέρια, είναι μία άμεση εμπειρία που διαπιστώνεται πολύ πριν διατυπωθούν οι νόμοι που διέπουν τη συμπεριφορά των στερεών, των υγρών και των αερίων. Εξάλλου οι νόμοι που επινοούν οι επιστήμονες αλλάζουν με το χρόνο, είτε μετά από ακριβέστερες παρατηρήσεις, είτε με τη θεωρητική αναζήτηση. Π.χ. οι κινήσεις των πλανητών αποδόθηκαν από τον Πτολεμαίο σε επικυκλικές κινήσεις. Δηλαδή σε κυκλικές κινήσεις γύρω από σημεία που κάνουν και αυτά κυκλικές κινήσεις γύρω από ένα κεντρικό σώμα. Αργότερα προστέθηκε μια ιεραρχία επικύκλων για να εξηγηθούν ορισμένες λεπτομέρειες των παρατηρούμενων κινήσεων. Και είναι χαρακτηριστικό το ότι όταν ο Κοπέρνικος (1473-1543) έθεσε στο κέντρο όλων των κινήσεων τον Ήλιο αντί για τη Γη, χρειάστηκε να προσθέσει περισσότερους επίκυκλους από τον Πτολεμαίο.

Αργότερα βέβαια ο Κέπλερ (1571-1630) διαπίστωσε ότι όλα εξηγούνται πολύ καλύτερα με ελλειπτικές κινήσεις και διατύπωσε τους περίφημους 3 νόμους του. Στη συνέχεια ο Νεύτων (1643-1727) απέδειξε ότι οι ελλειπτικές κινήσεις του Κέπλερ εξηγούνται θαυμάσια αν δεχθούμε το νόμο του της παγκοσμίου έλξεως, δηλαδή μία δύναμη αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της αποστάσεως.

Αλλά και πάλι διαπιστώθηκαν εκτροπές από τις ελλειπτικές κινήσεις, που αρχικά αποδόθηκαν σε παρέλξεις των άλλων πλανητών, και αυτή η παραδοχή οδήγησε τους Leverrier και Adams στην ανακάλυψη του Ποσειδώνα. Παρέμεινε όμως μία ακόμα ανωμαλία, η μετάθεσή του περιηλίου του Ερμού. Αυτή αρχικά αποδόθηκε σε έναν υποθετικό πλανήτη Ήφαιστο, ο οποίος όμως ουδέποτε παρατηρήθηκε. Η εξήγηση δόθηκε αργότερα από τον Einstein (1879-1955) με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Και έτσι τελειώσαμε; Όχι βεβαίως. Γιατί σήμερα γίνεται μεγάλη συζήτηση στην Κοσμολογία για γενικεύσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και για την ύπαρξη και τις ιδιότητες της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας που διέπουν το Σύμπαν. Σε όλες αυτές τις φάσεις της Φυσικής (συμπεριλαμβανομένης της Αστρονομίας), η βασική πρόοδος προήλθε από την παρατήρηση και το πείραμα. Η θεωρία έπαιξε βέβαια σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια εξηγήσεως των παρατηρήσεων και του πειράματος. Ο ρόλος της θεωρίας είναι διπλός. Πρώτον αναπτύσσει τις συνέπειες των δεδομένων φυσικών νόμων, προβλέπει νέα φαινόμενα που οδηγούν

τους επιστήμονες σε νέα πειράματα και παρατηρήσεις, ώστε να ελεγχθεί η κάθε θεωρητική πρόβλεψη. Και δεύτερον, προσπαθεί να τροποποιήσει τους γενικούς φυσικούς νόμους, ή να βρει νέους νόμους οι οποίοι θα μπορούν να εξηγήσουν καλύτερα τα φαινόμενα, ή να κάνει προβλέψεις που είναι δυνατόν να ελεγχθούν πειραματικά. Αλλά το βασικό ερώτημα παραμένει. Γιατί η φύση ακολουθεί, έστω κατά προσέγγιση, τους γνωστούς μας φυσικούς νόμους, που έχουν κατά κανόνα μία απλή μαθηματική διατύπωση;

Οι επιστήμονες και φιλόσοφοι κάθε εποχής προσπάθησαν να διατυπώσουν μερικές βασικές αρχές που υποτίθεται ότι ακολουθεί η φύση. Οι αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν τους κύκλους ως τις θεμελιώδεις δομές της Αστρονομίας. Οι επίκυκλοι είναι κύκλοι γύρω από κύκλους.

Μετά την Αναγέννηση η έμφαση δόθηκε στις Νευτώνειες δυνάμεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο μεγάλος φιλόσοφος Καντ (1724-1804) στη μελέτη του χώρου και του χρόνου διατύπωσε την άποψη ότι οι δυνάμεις μεταξύ ουρανίων σωμάτων δεν μπορούν να είναι άλλες από την Νευτώνεια δύναμη (το $1/r^2$). Και το στήριξε αυτό σε συλλογισμούς ανάλογους με αυτούς που χρησιμοποιούμε στην φωτομετρία όπου το φως “μοιράζεται” σε σφαιρικές επιφάνειες $4\pi r^2$. Αλλά αυτό ισχύει μόνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία, που ο Καντ δεν μπορούσε να φανταστεί ότι δεν ισχύει στο Σύμπαν.

Σήμερα θεωρούμε αυτονόητη την αντίληψη του Einstein ότι ο χρόνος είναι καμπύλος, μη ευκλείδειος, και η καμπυλότητα του εξαρτάται από την κατανομή της ύλης. Αλλά και πάλι όταν βρεθούμε σε δυσκολίες εισάγουμε νέες έννοιες, όπως πρόσφατα με το πεδίο Higgs, πέραν από τα πεδία της βαρύτητας και του Ηλεκτρομαγνητισμού. Εν πάση περιπτώσει το κριτήριο για την ορθότητα ή όχι μιας θεωρίας είναι η εμπειρία μας, η παρατήρηση και το πείραμα. Αλλά είναι μόνο η εμπειρία;

Α.2 Εμπειριοκρατία

Η φιλοσοφική αντίληψη ότι μόνον η εμπειρία μας δίνει την πραγματικότητα ονομάζεται εμπειριοκρατία. Η εμπειριοκρατία ισχυρίζεται ότι τα Μαθηματικά ειδικότερα, βασίζονται στην εμπειρία. Π.χ. Το $1 + 1 = 2$ το βρίσκουμε όταν μετράμε πέτρες, ή φασόλια, ή νομίσματα. Και αν πει κανείς ότι το 2 δεν είναι παρά ο ορισμός του $1 + 1$ (ενώ το 3 είναι ο ορισμός του $2 + 1$ και το 4 είναι ο ορισμός του $3 + 1$), τότε γιατί $2 + 2$ κάνει 4; Αυτό ακριβώς προκύπτει από την εμπειρία μας.

Αλλά δεν είναι πάντοτε τόσο απλά τα πράγματα. Αν θεωρήσουμε δύο σταγόνες νερού που πέφτουν στο ίδιο σημείο, αυτές κάνουν μία σταγόνα, ή δύο σύννεφα μαζί ένα σύννεφο (άλλοτε κάνουν τρία σύννεφα ή δεν ξέρω πόσα). Και πόσα είναι το $1 + 1$ εάν έχουμε ανόμοια αντικείμενα; π.χ. μία πέτρα και ένα παιδάκι;

Εδώ θυμάμαι ένα ανέκδοτο από τον καιρό της Χούντας. Θέλει ο Παπαδόπουλος να διορίσει έναν διευθυντή των Οικονομικών Υπηρεσιών. Και παρουσιάζονται τρεις υποψήφιοι, ένας μαθηματικός, ένας οικονομολόγος και ένας νομικός. Ο Παπαδόπουλος τους ρωτά πόσο κάνουν $1 + 1$; Ο μαθηματικός απαντά: 2 κ. πρόεδρε, βάσει των τάδε και τάδε αξιωμάτων των μαθηματικών. Ο οικονομολόγος λέει: Εξαρτάται από τις συνθήκες της αγοράς. Μία κονσέρβα κάνει α δραχμές. Αν ένας αγοράσει 2 κονσέρβες θα έχει μία έκπτωση, άρα θα πληρώσει π.χ. 1.9 φορές την τιμή α. Ο Νομικός απαντά: $1 + 1$ θα κάνει από εδώ και στο εξής ό,τι αποφασίσετε εσείς κύριε πρόεδρε.

Θα κάνουμε μία υπουργική απόφαση που δεν θα επιτρέπει προσφυγή στο ΣτΕ. Η ερώτηση κατόπιν αυτών είναι: Ποιος νομίζετε ότι πήρε τη θέση του διευθυντού της οικονομίας; Πολλοί απαντούν ο τρίτος. Αλλά όχι, την θέση την πήρε ένας τέταρτος, απόστρατος στρατηγός.

Αλλά αφήνοντας τα αστεία διαπιστώνουμε ότι η εμπειρία μας δεν είναι ποτέ απολύτως ακριβής. Π.χ. χρησιμοποιούμε έννοιες όπως σημείο ή ευθεία, αλλά ποτέ δεν έχουμε ένα πραγματικό σημείο μηδενικών διαστάσεων. Και μία τεντωμένη κλωστή μόνο κατά προσέγγιση είναι ευθεία (διότι η κλωστή έχει κάποιο βάρος που την κάνει ελαφρά καμπυλωμένη). Επομένως η εμπειρία είναι καλή υπό ορισμένες προϋποθέσεις και πάντοτε δίνει προσεγγιστικά αποτελέσματα.

Α.3 Πλατωνισμός

Στα Μαθηματικά λέμε συνήθως ότι υπάρχουν ιδεατές έννοιες του σημείου, η της ευθείας και οι έννοιες αυτές υπακούουν σε ορισμένα αξιώματα. Με βάση τα αξιώματα αυτά διατυπώνουμε θεωρήματα και τα αποδεικνύουμε. Π.χ. σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, όπου α και β είναι οι δύο κάθετες πλευρές και γ η υποτείνουσα. Το Πυθαγόρειο θεώρημα $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, έχει πολλές αποδείξεις και δεν προέκυψε από μετρήσεις με υποδεκάμετρο που είναι μόνο προσεγγιστικές.

Εδώ ακριβώς στηρίζεται η θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα. Όλα τα μαθηματικά σύμβολα και θεωρήματα υπάρχουν σε ένα κόσμο Ιδεών και υπάρχουν αιωνίως. π.χ. το Πυθαγόρειο θεώρημα υπήρχε πριν το ανακαλύψει ο Πυθαγόρας και κανείς δεν αμφιβάλλει για αυτό. Επομένως ο Πυθαγόρας ανακάλυψε κάτι που προϋπήρχε. Δεν δημιούργησε αυτός το Πυθαγόρειο θεώρημα. Όλα τα Μαθηματικά προϋπήρχαν του ανθρώπου. Οι μαθηματικοί ερευνητές ψάχνουν να βρουν νέα θεωρήματα μέσα στον κόσμο των Ιδεών, όπως ένας πειραματικός φυσικός έρευνα τον Φυσικό κόσμο και ψάχνει να βρει τους νόμους που τον διέπουν. Ομοίως ένας αστρονόμος ανακαλύπτει καινούργιους αστέρες και πλανήτες. Όλα όσα ανακαλύπτει ο φυσικός και ο αστρονόμος είναι έξω από αυτόν. Το ίδιο ισχύει και για τον πλατωνιστή Μαθηματικό. Όλα όσα ανακαλύπτει ο μαθηματικός είναι έξω από αυτόν.

Βεβαίως ο κόσμος του Πλάτωνα περιλαμβάνει πολύ περισσότερα πράγματα από τα Μαθηματικά. Περιλαμβάνει ιδέες. Αλλά πώς ερχόμαστε σε επαφή με τον κόσμο αυτόν των ιδεών; Και είναι πράγματι ο κόσμος αυτός εντελώς ανεξάρτητος από τον άνθρωπο; Ας πάρουμε το παράδειγμα της μουσικής. Θυμάμαι μία ερώτηση που έκανε παλιότερα κάθε πρωί ένα παιδάκι στο ραδιόφωνο. Πού πάει η μουσική όταν δεν την ακούμε πια; Χάνεται; Όχι βεβαίως. Παραμένει στη μνήμη ορισμένων που άκουσαν τη μουσική ή σε μουσικά κείμενα με νότες, ή σε δίσκους ή δισκέτες. Κι αν χαθούν οι νότες, οι δίσκοι και οι δισκέτες, πάλι μπορούν οι άνθρωποι που εδημιούργησαν ή άκουσαν τη μουσική να τη διδάξουν σε άλλους νεώτερους ανθρώπους. Έτσι έκαναν οι τροβαδούροι επί αιώνες, πριν ανακαλυφθεί η μουσική γραφή. Πάντως τα τραγούδια των τροβαδούρων και τα αριστουργήματα της μουσικής δημιουργήθηκαν από τον άνθρωπο. Δεν υπήρχαν πριν δημιουργηθούν αλλά εξακολουθούν να υπάρχουν αφ' ότου δημιουργήθηκαν. Αλλά θα πει κανείς ότι τα περισσότερα ηχητικά δημιουργήματα του ανθρώπου είναι θόρυβοι η κακοφωνίες αφόρητες. Όλα αυτά εξακολουθούν να υπάρχουν στις μνήμες των ανθρώπων αλλά τα περισσότερα από αυτά

ξεχνιούνται ή χάνονται με το θάνατο των ανθρώπων. Παραμένουν μόνο όσα έχουν αξία.

Αλλά ας επανέλθουμε στα Μαθηματικά. Εκτός της Πλατωνικής φιλοσοφίας υπήρχαν άλλες φιλοσοφίες που δίνουν έμφαση σε άλλα στοιχεία της πραγματικότητας, όπως είναι η Λογική και η Διάισθηση.

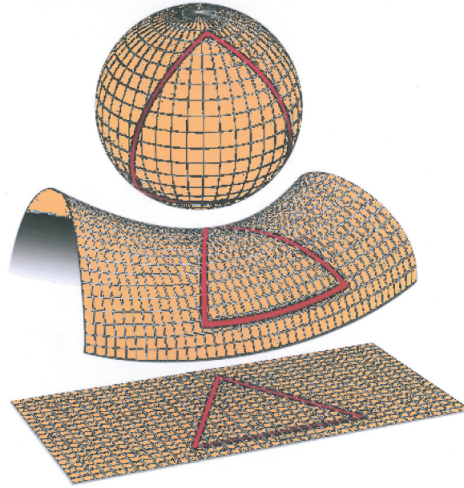
Α.4 Λογική

Η λογική βασίζεται σε ορισμένες θεμελιώδεις αρχές, τα αξιώματα, οι οποίες ισχύουν όχι μόνο στα παρατηρούμενα αντικείμενα αλλά και στις έννοιες και στους συλλογισμούς μας γενικότερα. Π.χ. λέμε ότι αν δύο αντικείμενα είναι ίσα με ένα τρίτο, τότε είναι ίσα μεταξύ τους. Π.χ. αν δύο τρίγωνα είναι ίσα με ένα τρίτο τρίγωνο τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους. Συνήθως η λογική ονομάζεται Αριστοτέλεια λογική, διότι τα αξιώματα της τα διατύπωσε ο Αριστοτέλης. Ένα βασικό αξίωμα της Αριστοτέλεια λογικής είναι η αρχή της του τρίτου αποκλείσεως. Αν αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα δεν είναι άνισα, τότε είναι βέβαιο ότι αυτά τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Αυτή όμως η αρχή αμφισβητήθηκε αργότερα από τους διαισθητικούς μαθηματικούς (Brouwer, ίδε Α.6).

Υπάρχει τώρα μία φιλοσοφική σχολή που δέχεται ότι τα Μαθηματικά είναι ένας κλάδος της λογικής. Είναι η σχολή του Russell (1872-1970) ή των Russell-Whitehead, που κυκλοφόρησαν ένα βιβλίο, το Principia Mathematica (1925), όπου περιλάμβαναν όχι μόνο τα γνωστά έως τότε θεωρήματα των μαθηματικών, αλλά και πολλά νέα. Και όλα προκύπτουν από τα αξιώματα της λογικής. Αλλά δεν υπάρχουν άλλα θεωρήματα; Ας δούμε όμως το θέμα λεπτομερέστερα. Τα Μαθηματικά χωρίζονται σε δύο βασικούς κλάδους. Την άλγεβρα που ασχολείται με αριθμούς και την γεωμετρία που ασχολείται με το χώρο. Μερικοί ανάγουν τη γεωμετρία στην άλγεβρα χρησιμοποιώντας συντεταγμένες στο χώρο, πού είναι αριθμοί. Άλλοι πάλι θεωρούν τη γεωμετρία πιο βασική και προσπαθούν να οικοδομήσουν την άλγεβρα πάνω στη γεωμετρία ή στην προέκταση της γεωμετρίας, την τοπολογία.

Αλλά η γεωμετρία αρχίζει με μερικές έννοιες και μερικά αξιώματα που τα διατύπωσε ο Ευκλείδης τον 2ο αιώνα προ Χριστού. Π.χ. χρησιμοποίησε τις έννοιες του σημείου, της ευθείας, του κύκλου, του επιπέδου, κλπ. Τα βασικά του αξιώματα είναι 4. Π.χ. δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία, δύο διαφορετικές ευθείες τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο (αν είναι στο ίδιο επίπεδο) κλπ. Όλα αυτά θεωρούνται προφανή και δεν φαίνεται να τα αμφισβήτησε κανείς σοβαρά. Αλλά ο Ευκλείδης προσέθεσε και ένα 5ο αξίωμα, το αξίωμα των παραλλήλων. Από ένα σημείο εκτός μιας ευθείας, στο ίδιο επίπεδο, άγεται μία και μόνο ευθεία, η οποία δεν τέμνει τη δοθείσα ευθεία (είναι παράλληλη προς αυτήν).

Πολλοί προσπάθησαν να αποδείξουν το αξίωμα των παραλλήλων με βάση τα υπόλοιπα αξιώματα, χωρίς όμως επιτυχία. Μερικοί μάλιστα, προσπάθησαν να αποδείξουν ότι αν δεν δεχτούμε το αξίωμα αυτό τότε οδηγούμαστε σε αντιφάσεις (στην πραγματικότητα όμως απλώς διατύπωσαν θεωρήματα της μη ευκλείδειου γεωμετρίας). Τέλος ο Gauss (1777-1855), ο Lobachevsky (1792-1856) και ο Bolyai (1802-1860) διατύπωσαν τη μη ευκλείδεια γεωμετρία σύμφωνα με την οποία από κάθε σημείο του επιπέδου εκτός μιας ευθείας άγονται άπειρες ευθείες, οι οποίες δεν τέμνουν την δοθείσα ευθεία. Εξάλλου ο Riemann κατασκεύασε μία γεωμετρία στην



Σχήμα Α'.1: Ένα τρίγωνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία (κάτω), στην γεωμετρία Lobachevsky (μέση) και στην γεωμετρία Riemann (επάνω).

οποία όλες οι ευθείες του επιπέδου τέμνονται και δεν υπάρχει καμία παράλληλος.

Αργότερα αποδείχθηκε ότι οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες μπορούν να αντιστοιχίσουν σε ένα 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο με γεωδαισιακές καμπύλες πάνω σε μία επιφάνεια, υπερβολοειδή στην περίπτωση των Lobachevsky και Bolyai ή σε μία σφαιρική επιφάνεια στην περίπτωση του Riemann (Σχ. Α'.1). Στην γεωμετρία των Lobachevsky και Bolyai οι 3 γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα $< 180^\circ$, ενώ στην γεωμετρία του Riemann έχουν άθροισμα $> 180^\circ$. Στην περίπτωση της σφαιρικής επιφάνειας θεωρήσουμε τρισσορθόγωνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Σ' αυτό δύο από τα συνήθη θεωρήματα της ευκλείδειου γεωμετρίας δεν ισχύουν. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν άθροισμα 270° και όχι 180° . Το Πυθαγόρειο θεώρημα δεν ισχύει, διότι $\beta = \gamma = \alpha$, άρα $\alpha^2 + \beta^2 = 2\gamma^2$ κ.ο.κ. (Σε πολύ μικρά τρίγωνα η γεωμετρία του Riemann τείνει στην ευκλείδειο γεωμετρία).

Επειδή η αντιστοιχία μεταξύ των θεωρημάτων που ισχύουν στη γεωμετρία του Riemann και των αντίστοιχων θεωρημάτων που ισχύουν πάνω στην ευκλείδεια σφαίρα είναι πλήρης, αποδεικνύεται ότι αν η ευκλείδεια γεωμετρία δεν περιέχει αντιφάσεις (αλλά αυτό δεν αποδεικνύεται, ιδ. το θεώρημα του Gödel), τότε ούτε η γεωμετρία του Riemann περιέχει αντιφάσεις. και το ίδιο ισχύει με την γεωμετρία των Lobachevsky και Bolyai. Τώρα τι ισχύει στην πραγματικότητα; Αλλά ποια είναι η πραγματικότητα; Αν δεχτούμε τη Γενική Σχετικότητα του Einstein, τότε ο χώρος είναι καμπύλος και ισχύει η γεωμετρία του Riemann.

Αλλά τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο η γεωμετρία. Ένας μεγάλος κλάδος των μαθηματικών είναι η θεωρία των συνόλων. Η θεωρία των συνόλων αναπτύχθηκε κυρίως από τον Cantor (1845-1918) και αποτελεί το θεμέλιο των μαθηματικών που διδάσκεται στα σχολεία μας. Σύνολα αναφέρονται σε αντικείμενα, αλλά και σε έννοιες και σε οτιδήποτε είναι καθορισμένο με ορισμένο τρόπο.

Όμως η θεωρία των συνόλων αντιμετωπίζει προβλήματα όταν τα αντικείμενα είναι άπειρα. Π.χ. τα αριθμήσιμα σύνολα, (όπως οι ρητοί αριθμοί), χαρακτηρίζονται από ένα σύμβολο το εβραϊκό άλεφ $\aleph$ με δείκτη 0. Αυτό λέγεται πληθικός αριθμός (cardinal number). Τα $\aleph_0$ έχουν ορισμένες περίεργες ιδιότητες. Π.χ. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Δηλαδή εδώ έχουμε μία περίπτωση που $1 + 1$ κάνει 1 και όχι 2.

Αλλά το σύνολο των δεκαδικών αριθμών από 0 έως 1 αποτελεί το συνεχές (c) και έχει αποδειχθεί ότι το c έχει περισσότερα μέλη από το $\aleph_0$. Εξ άλλου υπάρχουν σύνολα με πληθικό αριθμό μεγαλύτερο του c . Το ερώτημα τώρα είναι αν υπάρχουν σύνολα με πληθικό αριθμό μεταξύ $\aleph_0$ και συνεχούς c ; Ο Cantor υπέθεσε ότι υπάρχουν. Αλλά έχει αποδειχθεί ότι η ύπαρξη τους δεν μπορεί να αποδειχθεί με τα γνωστά αξιώματα των μαθηματικών, αλλά ούτε είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν. Τα χειρότερα όμως προβλήματα προκύπτουν όταν ερχόμαστε σε σύνολα συνόλων. Δηλαδή όταν τα αντικείμενα ενός συνόλου είναι σύνολα. Σε τέτοια σύνολα εμφανίζεται το παράδοξο του Russell. Το παράδοξο αυτό αναφέρεται σε σύνολα Δ , που δεν περιέχουν τον εαυτό τους και σε σύνολα Π , που περιέχουν τον εαυτό τους. Π.χ. το σύνολο των ανθρώπων δεν περιέχει τον εαυτό του, δεν είναι άνθρωπος. Αλλά το σύνολο των συνόλων που περιέχουν άπειρα μέλη περιέχει τον εαυτόν του, γιατί το σύνολο αυτό έχει άπειρα μέλη. 'Το σύνολο των συνόλων που ορίζονται με λιγότερες από 20 λέξεις' περιέχει τον εαυτό του γιατί το ορίσαμε με 11 λέξεις.

Τότε ο Russell θέτει το ερώτημα: Το σύνολο των συνόλων Δ , ας το ονομάσουμε Σ , περιέχει ή όχι τον εαυτόν του, είναι δηλαδή τύπου Π ή Δ ; Αν το Σ είναι τύπου Π τότε περιέχει τον εαυτόν του δηλαδή περιέχει ένα σύνολο τύπου Π , ενώ εξ ορισμού το Σ περιέχει μόνο σύνολα Δ . Αν πάλι το Σ δεν είναι τύπου Π , τότε είναι τύπου Δ , άρα περιλαμβάνεται στα σύνολα Δ , δηλαδή περιέχει τον εαυτό του. Συμπέρασμα: Η θεωρία των συνόλων περιέχει αντιφάσεις.

Ο Russell αντιμετώπισε το πρόβλημα αυτό με την απαγόρευση να ονομάσουμε σύνολα τα σύνολα συνόλων. Τέτοια σύνολα ο Russell τα ονομάζει "σύνολα 2ας τάξεως", που δεν είναι της μορφής των συνήθων συνόλων (Δ), που μπορούμε να τα ονομάσουμε "σύνολα πρώτης τάξεως". Αλλά τότε υπάρχουν και σύνολα τρίτης τάξεως που είναι σύνολα συνόλων 2ας τάξεως κ.ο.κ. Αλλά έτσι το σύστημα των συνόλων γίνεται πολύ πολύπλοκο.

Υπάρχουν βεβαίως ωρισμένα παράδοξα που φαίνονται σαν σφάλματα της λογικής, αλλά δεν είναι παρά κακές φράσεις. Π.χ. Αν ρώτησε ο αστυνομικός "πέρασε ο τάδε από εδώ;" και ο μάρτυς απαντά "ο τάδε δεν πέρασε από εδώ" δείχνοντας το μανίκι του, η απάντηση είναι αληθινή, αν με τη λέξη εδώ εννοούμε το μανίκι, ενώ είναι αμφιβόλου αλήθειας (και μάλλον ψευδής) στην πραγματικότητα, διότι ο αστυνομικός βεβαίως με τη λέξη εδώ εννοεί τον γύρω χώρο και όχι το μανίκι. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί να οριστούν με ακρίβεια οι λέξεις που χρησιμοποιούμε.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που εμφανίζονται πραγματικές αντιφάσεις στη λογική. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η φράση του Απ. Παύλου "Είπε τις εξ αυτών ... Κρήτες αεί ψεύσται...". Δεδομένου ότι αυτό το είπε ένας Κρητικός, τότε ό,τι κι αν έλεγε ήταν ψευδές. Επομένως και η φράση αυτή είναι ψευδής, άρα οι Κρητικοί δεν είναι ψεύτες. Άρα η φράση είναι αληθινή, κ.ο.κ. Τα παράδοξα αυτά εμφανίζονται όταν υπάρχουν αυτοαναφορές σε μία πρόταση. Δηλαδή όταν μία πρόταση αναφέρεται στον εαυτό της. Ο Russell για να αποφύγει τα παράδοξα αυτά διακρίνει τις προτάσεις, όπως και τα σύνολα, που αναφέρονται σε σύνολα προτάσεων σε προτάσεις 2ας τάξεως, και τις διακρίνει από τις προτάσεις που δεν αναφέρονται σε σύνολα προτάσεων, που τις ονομάζει προτάσεις πρώτης τάξεως. Η πρόταση για τους Κρήτες αναφέρεται σε σύνολα προτάσεων, διότι περιέχει τη λέξη "αεί" και μέσα στο "αεί" περιλαμβάνεται και η ίδια η πρόταση "Κρήτες αεί ψεύσται", οπότε η πρόταση αναφέρεται και στον εαυτό της. Αλλά ο Russell λέει ότι αυτή η πρόταση είναι λάθος,

διότι δεν επιτρέπεται να αναμειγνύονται οι προτάσεις διαφόρων τάξεων. Δηλαδή η πρόταση αυτή είναι απλώς ψευδής και δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε μήπως είναι αληθής. Αλλά ασφαλώς ούτε ο Κρητικός που είπε τη φράση αυτή, ούτε ο Απ. Παύλος που την επανέλαβε, δεν είχαν διαπιστώσει τις διακρίσεις που έκανε ο Russell. Πάντως τα παραδείγματα των λογικών αποδείξεων δείχνουν ότι η λογική έχει προβλήματα που πρέπει να ξεπεραστούν.

Α.5 Φορμαλισμός

Μία άλλη φιλοσοφική θεμελίωση των μαθηματικών οφείλεται στον Hilbert (1892-1943) και τους συνεργάτες του και ονομάζεται φορμαλισμός. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή τα αξιώματα των μαθηματικών δεν αναφέρονται σε πραγματικά αντικείμενα, αλλά σε “σχέσεις” που καθορίζονται από τα αξιώματα. Π.χ. όταν λέμε ότι δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία δεν πρέπει να αναφερόμαστε σε μία πολύ μικρή κουκίδα και σε μία τεντωμένη κλωστή αλλά απλώς σε δύο λέξεις (σημείο, ευθεία) που δεν ορίζονται. Τα Μαθηματικά κατά τον Hilbert είναι οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων εννοιών. Π.χ. το Πυθαγόρειο θεώρημα περιλαμβάνει λέξεις (ευθείες, γωνίες, τετράγωνο, κλπ) και αποδεικνύεται αν δοθούν τα αξιώματα, συμπεριλαμβανομένου του ευκλείδειου αξιώματος. Οι αποδείξεις δίνονται πάλι με τις ίδιες λέξεις και δεν έχει σημασία τι σημαίνουν οι λέξεις αυτές (ευθεία, γωνία κλπ).

Η σχολή του Hilbert ασχολήθηκε με ένα βασικό πρόβλημα των μαθηματικών. Το να αποδείξουν ότι τα αξιώματα των μαθηματικών οδηγούν πάντοτε σε ασφαλή συμπεράσματα. Δηλαδή δεν οδηγούν ποτέ σε αντιφάσεις. Π.χ. δεν οδηγούν ποτέ σε ένα αντιφατικό συμπέρασμα όπως το $1 = 0$, ή ότι δεν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στην ευκλείδεια γεωμετρία κλπ.

Είναι αλήθεια ότι ως τώρα δεν βρήκαμε ποτέ αντιφάσεις στα συνηθισμένα Μαθηματικά. Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι ποτέ δεν θα υπάρξουν τέτοιες αντιφάσεις; Και τότε ήρθε μία απροσδόκητη ανατροπή του όλου οικοδομήματος του Hilbert και της φορμαλιστικής φιλοσοφίας από τον Gödel (1906-1978), ο οποίος απέδειξε ότι είναι αδύνατον να αποδειχθεί η έλλειψη αντιφάσεων στα Μαθηματικά του φορμαλισμού. Συγκεκριμένα ο Gödel απέδειξε δύο βασικές προτάσεις: (α) ότι υπάρχουν θεωρήματα αληθινά που δεν προκύπτουν από ένα ορισμένο σύστημα αξιωμάτων, και (β) ότι είναι αδύνατον να αποδειχθεί ότι ένα ορισμένο σύστημα αξιωμάτων δεν περιέχει αντιφάσεις. Τα θεωρήματα του Gödel αναφέρονται στις προτάσεις του Hilbert, οι οποίες όμως αποδίδονται με αριθμούς. Π.χ. μπορούμε να αριθμήσουμε τα γράμματα, τα σύμβολα $+$, $\times$, $:$, $=$ κλπ. τις λέξεις και τις προτάσεις με αριθμούς. Ας θεωρήσουμε λοιπόν όλες τις μαθηματικές προτάσεις, συμπεριλαμβανομένων των αποδείξεων, ως ταξινομημένες σε μία ακολουθία: 1η πρόταση, 2η πρόταση κλπ. που δίνονται με αριθμούς.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Cantor για να αποδείξει ότι οι δεκαδικοί αριθμοί μεταξύ 0 και 1 είναι περισσότεροι από ένα άπειρο αριθμήσιμο πλήθος. Η απόδειξη του Cantor είναι η εξής. Αν θεωρήσουμε ότι όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί περιλαμβάνονται σε μία αριθμήσιμη ακολουθία, έστω την εξής:

$$(A) = \begin{cases} 1o & 0.1251 \dots \\ 2o & 0.3802 \dots \\ 3o & 0.8110 \dots \\ & \text{κλπ.} \end{cases}$$

τότε υπάρχουν πολύ περισσότεροι δεκαδικοί αριθμοί που δεν περιλαμβάνονται στην ακολουθία αυτή. Κάθε δεκαδικός αριθμός που το πρώτο του ψηφίο είναι διαφορετικό από το πρώτο ψηφίο του 1ου αριθμού της ακολουθίας, το δεύτερο ψηφίο του είναι διαφορετικό από το δεύτερο ψηφίο του 2ου αριθμού κ.ο.κ. δεν ανήκει στην ακολουθία(A). Π.χ. ο αριθμός 0,249... είναι δεκαδικός αριθμός αλλά διαφέρει από όλους τους αριθμούς της ακολουθίας. Άρα η ακολουθία (A) δεν περιέχει όλους τους δεκαδικούς. Η μέθοδος του Cantor ονομάζεται διαγώνιος μέθοδος.

Ο Gödel εφάρμοσε τη μέθοδο αυτή στους αριθμούς που προκύπτουν από τα θεωρήματα της φορμαλιστικής μεθόδου του Hilbert και απέδειξε (α) ότι υπάρχουν θεωρήματα που είναι σωστά, αλλά δεν προκύπτουν από τα αξιώματα του Hilbert και (β) ότι υπάρχουν προτάσεις που δεν ξέρουμε αν είναι σωστές ή λάθος, με βάση τα αξιώματα του Hilbert. Και μία τέτοια πρόταση είναι ότι το σύστημα αξιωμάτων του Hilbert (και οποιωνδήποτε άλλων αξιωμάτων που αναφέρονται στην αριθμητική), δεν μπορούμε να πούμε αν περιέχει ή όχι αντιφάσεις (πάντως δεν μπορούμε να αποδείξουμε με τα αξιώματα αυτά ότι δεν υπάρχουν αντιφάσεις).

Μία παρόμοια απόδειξη έδωσε ο Turing (1912-1954) σε ένα βασικό πρόβλημα των υπολογιστών. Το αν υπάρχει ένα πρόγραμμα (αλγόριθμος) που να αποδεικνύει αν κάθε δοθέν πρόγραμμα (αλγόριθμος) θα δώσει λύση και θα σταματήσει ο υπολογιστής, ή αν δεν θα δώσει λύση και ο υπολογιστής δεν θα σταματήσει ποτέ. Ο Turing απέδειξε ότι τέτοιος γενικός αλγόριθμος που να ισχύει για όλους τους αλγόριθμους δεν υπάρχει.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Αν έχουμε ένα πρόγραμμα που δίνει τους πρώτους αριθμούς και ζητήσουμε από τον υπολογιστή να βρει τους πρώτους αριθμούς από 1 έως 1000, ο υπολογιστής ψάχνει όλους τους αριθμούς από το 1 ως το 1000 και σε λίγο μας δίνει την απάντηση 1, 2, 3, 5, 7, ... 997 και ο υπολογιστής σταματά. Αν όμως ζητήσουμε να βρεθεί ένας πρώτος αριθμός που να είναι άθροισμα δύο άρτιων αριθμών, ο υπολογιστής πάλι θα ψάχνει όλους τους αριθμούς 1, 2, 3, 5, ... και δεν θα σταματήσει ποτέ. Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε το αποτέλεσμα με ένα συλλογισμό (κάθε άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος και όχι περιττός) που όμως δεν εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο πρόγραμμα του υπολογιστή.

Ο Turing λοιπόν, απέδειξε ότι δεν υπάρχει μία μέθοδος (πρόγραμμα υπολογιστή, αλγόριθμος) που να μας λέει αν κάθε δοθέν πρόβλημα θα λυθεί και ο υπολογιστής θα σταματήσει, ή δεν θα λυθεί και ο υπολογιστής θα ψάχνει αιωνίως και δεν θα σταματήσει ποτέ. Η απόδειξη του Turing έχει ως εξής. Θεωρούμε όλα τα προγράμματα σε μία ακολουθία $C_1(n), C_2(n), \dots, C_q(n), \dots$ που αναφέρεται σε ένα ακέραιο αριθμό n και αναζητούμε έναν αλγόριθμο $A_q(n)$ που να μας λέγει ότι το πρόγραμμα $C_q(n)$ δεν σταματά και να αναφέρεται σε κάθε ακέραιο q και κάθε n . Δηλαδή ο αλγόριθμος $A_q(n)$ δίνει απάντηση (και σταματά) όταν το $C_q(n)$ δεν σταματά. Αλλά ο αλγόριθμος $A_q(n)$ είναι ένα πρόγραμμα της ακολουθίας $C_q(n)$. Έστω το $A_k(n) = C_k(n)$. Τότε το

$A_k(n)$ σταματά όταν το $C_k(n)$ δεν σταματά. Αλλά το $A_k(n)$ είναι το ίδιο με το $C_k(n)$. Δηλαδή έχουμε αντίφαση, άρα τέτοιο πρόγραμμα δεν υπάρχει.

Τα θεωρήματα των Gödel και Turing αποδεικνύουν ότι υπάρχουν πολλές προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχθούν με βάση μία δεδομένη ακολουθία αξιωμάτων, και όμως είναι δυνατόν να διαπιστώσουμε με άλλους τρόπους την αλήθεια τους. Ο Penrose (1931-, βραβείο Nobel 2020) σε ένα βιβλίο του με τίτλο “Shadows of the Mind” (“Σκιές του Νου”) έδειξε διάφορα τέτοια παραδείγματα. Στον φυσικό κόσμο υπάρχουν πολλά φαινόμενα που δεν υπόκεινται σε οιονδήποτε αλγόριθμο, είναι δηλαδή μη αλγοριθμικά. Και υποστηρίζει ότι η συνείδηση του ανθρώπου είναι ένα μη αλγοριθμικό φαινόμενο. Η κατανόηση των παρατηρούμενων φαινομένων είναι πέραν του υπολογισμού που μπορεί να κάνει οιοσδήποτε υπολογιστής. Και ενώ ο υπολογιστής μπορεί να κάνει καταπληκτικούς συνδυασμούς πράξεων που αποτελούν αυτό που ονομάζουμε τεχνητή νοημοσύνη, δεν κατανοεί αυτά τα οποία κάνει.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το “κινέζικο δωμάτιο” του Searle. Ο Searle (1864-1954) υποθέτει ότι βρίσκεται σε ένα κλειστό από παντού δωμάτιο, όπου του στέλνουν με τον υπολογιστή μηνύματα στα κινέζικα. Ο Searle δεν ξέρει καθόλου κινέζικα, έχει όμως ένα βιβλίο με οδηγίες πώς να απαντήσει σε κάθε ερώτηση πάλι στα κινέζικα. Το βιβλίο είναι γραμμένο στα αγγλικά, και επομένως οι απαντήσεις του δίνουν την εντύπωση ότι καταλαβαίνει τι τον ερωτούν, γιατί απαντάει πάντοτε σωστά. Αυτός όμως δεν καταλαβαίνει τίποτε, ούτε τί τον ερωτούν, ούτε τί τους απαντά. Απλώς εκτελεί τις οδηγίες του βιβλίου. Άλλο λοιπόν είναι η σωστή ανταπόκριση, και άλλο η κατανόηση των λεγομένων. Αυτή ακριβώς είναι η διαφορά μεταξύ τεχνητής νοημοσύνης και ανθρώπινης συνείδησης.

Επομένως, η κατανόηση είναι κάτι περισσότερο από την σωστή εκτέλεση ορισμένων οδηγιών (αλγορίθμων). Ο Penrose προσπαθεί να φανταστεί με ποιον τρόπο λειτουργεί η συνείδηση του ανθρώπου. Αναφέρεται σε ένα συνδυασμό της κβαντομηχανικής με τη θεωρία βαρύτητας της Γενικής Σχετικότητας του Einstein. Αλλά η θεωρία αυτή δεν έχει ακόμα θεμελιωθεί, ακριβέστερα δεν έχει καν διατυπωθεί πλήρως. Επομένως το θέμα παραμένει ανοικτό. Πάντως το γενικό συμπέρασμα είναι ότι μετά τα θεωρήματα των Gödel και Turing το ενδιαφέρον των ερευνητών για την φορμαλιστική θεμελίωση των Μαθηματικών έχει μειωθεί σημαντικά.

Α.6 Διαισθητική ή Κατασκευαστική Σχολή

Μία άλλη φιλοσοφική θεμελίωση του των Μαθηματικών είναι η διαισθητική, ή κατασκευαστική μέθοδος του Brouwer (1881-1966). Η μέθοδος αυτή θεωρεί ότι ορισμένες μαθηματικές έννοιες όπως οι ακέραιοι αριθμοί είναι διαισθητικά κατανοητή και δέχεται μόνο όσο θεωρήματα προκύπτουν από κατασκευές με βάση τους ακέραιους, αποκλείει όμως μεγάλες περιοχές των Μαθηματικών που δεν είναι κατασκευαστικές. Ειδικότερα, δεν παραδέχεται το αξίωμα του Αριστοτέλη της του τρίτου αποκλεισεως, το οποίο μας λέει ότι αν αποδείξουμε ότι μία πρόταση δεν είναι ψευδής τότε είναι αληθής. Π.χ. αν αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα δεν είναι άνισα τότε σύμφωνα με το αξίωμα αυτό θεωρούμε ότι τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ίσα. Ο Brouwer όμως ισχυρίζεται ότι δεν αρκεί να δείξουμε ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι άνισα. Μόνο αν κάνουμε μία κατασκευή που δείχνει την ισότητα των τριγώνων έχουμε πλήρη απόδειξη.

Έτσι ο Brouwer περιορίζει δραστικά την εφαρμογή των Μαθηματικών. Ας αναφέρουμε ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο Brouwer. Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα του αριθμού $\pi = 3.14159 \dots$ μέσα στο άπειρο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων υπάρχουν περιπτώσεις όπου εμφανίζονται δύο διαδοχικά τριάρια ή τρία διαδοχικά τριάρια. Υπάρχουν όμως 100 διαδοχικά τριάρια; Δεν ξέρουμε. Έχουν μέχρι τώρα υπολογίσει μερικά δισεκατομμύρια ψηφία του π και έχουν βρει ότι διάφοροι συνδυασμοί ψηφίων εμφανίζονται με ίση συχνότητα κατά μέσον όρο. Π.χ τα ψηφία 0, 1, 2, ..., 9 εμφανίζονται με ίση συχνότητα 1 : 10 περίπου. Οι συνδυασμοί 00, 01, 02, ..., 11, 12, ... εμφανίζονται με συχνότητα 1 : 100 κλπ. Επομένως θεωρείται πιθανόν ότι ο συνδυασμός 3333333333 έχει συχνότητα 1 : 10^{10} και κάποτε θα βρεθεί.

Έτσι θεωρούμε ότι κάπου υπάρχουν 100 διαδοχικά τριάρια, αλλά ένας υπολογιστής μεγάλος σαν ολόκληρο το ορατό Σύμπαν που θα δούλευε εντατικά από την αρχή του Σύμπαντος μέχρι σήμερα και δεν θα είχε την απάντηση. Κατόπιν αυτού ο Brouwer θεωρεί έναν αριθμό ο οποίος ταυτίζεται με τον π μέχρι της εμφάνισης 100 διαδοχικών 3. Αν ο πρώτος αριθμός 3 εμφανίζεται σε άρτιο πλήθος ψηφίων τότε ο σταματά στο πρώτο 3, οπότε ο είναι μικρότερος από τον π . Αν όμως ο πρώτος αριθμός 3 εμφανίζεται σε περιττό πλήθος ψηφίων τότε αντί 3 γράφουμε 4 και τότε ο $\bar{\pi}$ είναι μεγαλύτερος του π . Αν δεν υπάρχουν πουθενά 100 τριάρια, τότε $\bar{\pi} = \pi$. Κατά συνέπεια ο αριθμός $\bar{\pi} - \pi$ μπορεί να είναι αρνητικός, θετικός ή μηδέν. Ίσως να μάθουμε τι είναι ο αριθμός $\bar{\pi} - \pi$ στο μέλλον. Αλλά τότε τα Μαθηματικά αλλάζουν με τον χρόνο. Για τον λόγο αυτό η θεωρία του Brouwer δεν έχει πολλούς υποστηρικτές.

Α.7 Σχολή της Βιέννης

Υπάρχουν πολλές άλλες επιμέρους απόψεις για τα Μαθηματικά, που δεν είναι δυνατόν να τις αναπτύξουμε εδώ. Όμως μία σχολή Μαθηματικών απέκτησε ιδιαίτερο ενδιαφέρον τις προηγούμενες δεκαετίες. Είναι η σχολή “κύκλος της Βιέννης” (Schlick (1882-1936), Frank (1908-1990), Carnap (1891-1970) κλπ.), η οποία βασίστηκε στην ανάλυση της γλώσσας που έκανε ο Wittgenstein (1889-1951).

Η σχολή της Βιέννης τονίζει, πολύ σωστά, την ανάγκη να γίνει σαφής εις βάθος η γλώσσα που χρησιμοποιούμε. Βεβαίως δεν είναι δυνατόν να δώσουμε ορισμούς σε όλες τις λέξεις που χρησιμοποιούμε. Αν ορίσουμε τη λέξη “τετράγωνο” (το σχήμα που δημιουργείται από τέσσερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέονται σε τέσσερις κορυφές κάνοντας ορθές γωνίες) μπορούμε να αποφύγουμε τη λέξη αυτή (τετράγωνο) χρησιμοποιώντας τον ορισμό της. Αλλά υποτίθεται ότι έχουμε ήδη ορίσει τις λέξεις “ευθύγραμμο”, “τμήμα”, “κορυφή”, “ορθή γωνία” κλπ. Για να ορίσουμε και αυτά πάλι θα χρησιμοποιήσουμε άλλες λέξεις. Αλλά αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να προχωρήσει πέραν ενός ορίου. Θα φτάσουμε σε μερικές μη οριζόμενες λέξεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση για όλους τους ορισμούς και τους υπολογισμούς.

Φυσικά μεγάλη σημασία έχει η επιλογή των μη οριζόμενων εννοιών. Π.χ. στη μηχανική χρησιμοποιούμε τις έννοιες της μάζας του μήκους και του χρόνου. Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μεγεθών δίνονται από εξισώσεις οι οποίες ονομάζονται αξιώματα. Στη συνέχεια ορίζονται και υπολογίζονται όλες οι άλλες ποσότητες. Με τον τρόπο αυτό η επιστήμη αποκτά μία δομή παρόμοια με τη φορμαλιστική δομή των Μαθηματικών.

Εν τούτοις οι φυσικοί δεν εργάζονται με αυτόν τον τρόπο. Εν πρώτοις, οι διάφο-

ρες έννοιες της Φυσικής δεν είναι απλώς λέξεις χωρίς νόημα. Αντιθέτως, προσπαθούμε πάντοτε να κατανοήσουμε καλύτερα τις έννοιες αυτές και μερικές φορές βρίσκουμε απροσδόκητες ιδιότητες, όπως ότι η μάζα ισούται με την ενέργεια. Και όσον αφορά τους φυσικούς νόμους, αρκετές φορές είμαστε αναγκασμένοι να τους τροποποιήσουμε, ή έστω να τους διατυπώσουμε διαφορετικά, όπως τις αλλαγές που έφερε η θεωρία της Σχετικότητας στην Μηχανική.

Αλλά σε κάθε περίπτωση η Φυσική έχει ως οδηγό και θεμέλιο την παρατήρηση και το πείραμα. Όσο ωραία και αν είναι μία θεωρία από μαθηματικής σκοπιάς, αν δεν επαληθεύεται πλήρως σε ορισμένες ακραίες περιπτώσεις, αναγκάζομαστε να την απορρίψουμε ή, έστω, να την τροποποιήσουμε αναλόγως προς τις παρατηρήσεις μας.

Α.8 Φυσικοί νόμοι

Το πείραμα και η παρατήρηση διαπιστώνουν ότι υπάρχουν φυσικοί νόμοι που είναι παγκόσμιοι. Π.χ. βλέπουμε ότι οι κινήσεις ζευγών αστέρων σε τεράστιες αποστάσεις ακολουθούν τους νόμους του Νεύτωνα, και ακριβέστερα τους νόμους του Einstein. Τα φάσματα των μακρινών γαλαξιών μας δείχνουν ότι οι νόμοι της κβαντομηχανικής ισχύουν μέχρι τα πέρατα του Σύμπαντος. Και έχουμε πολλές ενδείξεις ότι οι νόμοι της πυρηνικής Φυσικής ισχύουν στην παραγωγή ενέργειας παντού στο Σύμπαν. Μερικοί προσπάθησαν να βρουν ορισμένες μικρές αλλαγές στους νόμους αυτούς, π.χ. ότι η σταθερά της βαρύτητας μεταβάλλεται μετά του χρόνου μέσα σε δισεκατομμύρια έτη. Τα δεδομένα δεν επιβεβαιώνουν ακόμη τις μεταβολές αυτές, αλλά και αν επιβεβαιωθούν, θα αλλάξει λίγο μόνο η διατύπωση των νόμων αυτών.

Πάντως υπάρχουν ακόμα περιοχές όπου αναζητούμε νέους νόμους της φύσεως. Π.χ. τα τελευταία έτη διαπιστώθηκε η ύπαρξη ενός νέου πεδίου, του πεδίου Higgs πέραν των τεσσάρων γνωστών πεδίων της βαρύτητας, του Ηλεκτρομαγνητισμού και των ασθενών και ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων.

Εν τούτοις παραμένουν προβλήματα που δεν έχουν διευκρινιστεί ακόμη, όπως η ύπαρξη υπερσυμμετρικής ύλης. Επίσης υπάρχουν διάφορες σχολές της Κβαντομηχανικής, όπως η σχολή της Κοπεγχάγης [Bohr (1885-1962), Born (1882-1970), Heisenberg (1901-1976) κλπ.], η σχολή των de Broglie (1892-1987) και Bohm (1917-1992), και των πολλών κόσμων του Everett (1930-1982), και γενικότερα παραμένει το πρόβλημα της συνδέσεως της Κβαντομηχανικής με τη Σχετικότητα. Η έρευνα πάνω στα θέματα αυτά είναι εντατική, τόσο σε πειραματικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο. Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι εφαρμογές της Φυσικής στη Βιολογία, όπου παρατηρούνται καταπληκτικά ολιστικά φαινόμενα που δεν εξηγούνται μόνο με την εφαρμογή των γνωστών νόμων της Φυσικής.

Ένα περίεργο φαινόμενο σχετικά με τους φυσικούς νόμους είναι ότι οι φυσικοί νόμοι που ανακαλύπτουμε έχουν μία απλότητα και μία ομορφιά που δεν την είχαμε υποπτευθεί προηγουμένως. Παραδείγματος χάριν η Νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας στηρίζεται σε ένα πολύ απλό νόμο, το ότι η βαρύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως.

Οι εκτροπές από τις προβλέψεις της Νευτώνειας θεωρίας στην τροχιά του Ερμή κλπ., που εξηγήθηκαν με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, έχουν και αυτές μία απλή και ωραία διατύπωση, ότι η καμπύλωση του χωροχρόνου είναι ανάλογη της μάζας-ενέργειας.

Ανάλογες ανακαλύψεις έγιναν και σε άλλα πεδία της Φυσικής όπως στην καταπληκτική συμμετρία μεταξύ Ηλεκτρισμού και Μαγνητισμού στις εξισώσεις του Maxwell, και στις απίστευτες εφαρμογές που έχει η εξίσωση του Schrödinger στην Κβαντομηχανική.

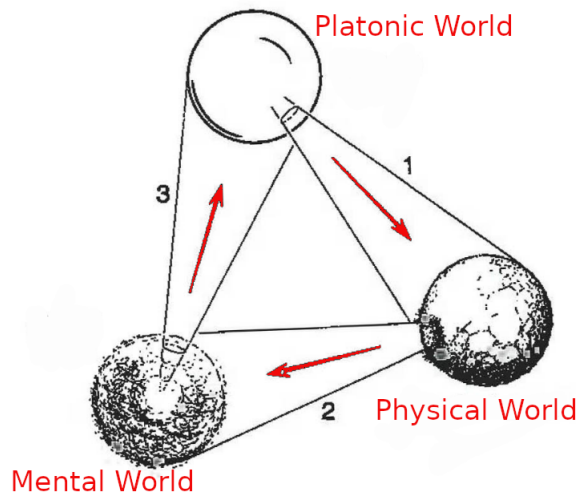
Βεβαίως οι εφαρμογές των απλών αυτών των νόμων μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, όπως το πρόβλημα των N σωμάτων, δεν υπάρχει όμως αμφιβολία ότι όλα τα πολύπλοκα φαινόμενα διέπονται από απλές αρχές. Και υπάρχει ελπίδα ότι και οι νόμοι που θα βρεθούν στο μέλλον θα έχουν ως βάση μία πιο γενική απλή αρχή.

Μία τέτοια απλή αρχή που φαίνεται ότι διέπει γενικά τους φυσικούς νόμους είναι η ανθρωπική αρχή. Διαπιστώνουμε ότι οι γνωστοί μας φυσικοί νόμοι επιτρέπουν την ανάπτυξη της ζωής και την εξέλιξη της μέχρι τον άνθρωπο. Π.χ. παρατηρούμε ότι η βαρύτητα είναι ασθενέστερη κατά ένα παράγοντα 10^6 από την ηλεκτρομαγνητική δύναμη. Και διερωτάται κανείς: τί θα άλλαζε αν η βαρύτητα ήταν ασθενέστερη ή ισχυρότερη; Η απάντηση είναι ότι αν ήταν ασθενέστερη δεν θα υπήρχαν συγκεντρώσεις ύλης σε αστέρες και πλανήτες όπως η Γη όπου κατοικούμε εμείς. Και αν ήταν ισχυρότερη, τότε η εξέλιξη των αστερών θα ήταν πολύ ταχύτερη και δεν θα υπήρχε το περιθώριο των δισεκατομμυρίων ετών, που επέτρεψε την εξέλιξη της ζωής μέχρι τον άνθρωπο.

Υπάρχουν πάρα πολλές εκδηλώσεις της ανθρωπικής αρχής. Ένα εντυπωσιακό παράδειγμα αφορά τη δημιουργία του άνθρακος στους αστέρες, που αποτελεί την χημική βάση της ζωής. Είναι γνωστή η θεωρία της δημιουργίας του άνθρακος από άτομα ηλίου He στο εσωτερικό αστερών με θερμοκρασία της τάξης των 10.000 βαθμών Kelvin. Δημιουργείται πρώτα ένα μετασταθές άτομο βηρυλλίου ^8Be και πριν ακόμη διασπαστεί το βηρύλλιο προσκρούει ένα τρίτο άτομο ηλίου και δημιουργεί τον άνθρακα ^{12}C . Αν το βηρύλλιο ήταν απολύτως ασταθές δεν θα προλάβαινε να προσκρούσει ένα τρίτο άτομο ηλίου. Αλλά η σχετική αστάθεια του βηρυλλίου εξαρτάται από την σχετική ισχύ των ασθενών και ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων. Αν οι πυρηνικές δυνάμεις άλλαζαν έστω και κατά 1% δεν θα ήταν δυνατόν να δημιουργηθεί ο άνθρακας. Άρα δεν θα υπήρχε η γνωστή μας ζωή, δεν θα υπήρχαμε εμείς.

Η ανθρωπική αρχή αποδεικνύει μία σκοπιμότητα στους φυσικούς νόμους, κάτι που είναι έξω από τη Φυσική. Για να αποφύγουν αυτό το συμπέρασμα πολλοί υποστήριζαν ότι οι φυσικοί νόμοι του Σύμπαντος είναι αποτέλεσμα τύχης και ότι υπάρχουν πρακτικά άπειρα άλλα Σύμπαντα έξω από το δικό μας που έχουν διαφορετικούς φυσικούς νόμους. Στα περισσότερα από τα Σύμπαντα αυτά οι φυσικοί νόμοι δεν επιτρέπουν την ανάπτυξη ζωής. Αλλά τα Σύμπαντα αυτά είναι τόσο μακριά από το δικό μας Σύμπαν, ώστε κάθε επικοινωνία με αυτά ακόμα και με την ταχύτητα του φωτός φαίνεται αδύνατη. Μία εκτίμηση είναι ότι το πλησιέστερο εξωτερικό Σύμπαν απέχει από εμάς κάπου $10^{1000000}$ έτη φωτός. Εξάλλου τα όρια του δικού μας Σύμπαντος που διαστέλλονται με την ταχύτητα του φωτός είναι στην απόσταση που φτάνει το φως ξεκινώντας από το Big Bang μέχρι σήμερα δηλαδή κάπου 14×10^9 έτη φωτός κάτι ασήμαντο σε σχέση με την απόσταση των άλλων συμπάντων.

Σε αυτά τα Σύμπαντα θα μπορούσε η βαρύτητα να είναι ισχυρότερη από τις πυρηνικές δυνάμεις και ούτω καθεξής. Μερικοί επιστήμονες ασχολούνται με το τι θα δημιουργούσαν τέτοιες δυνάμεις. Αλλά γιατί να υπάρχουν καν φυσικοί νόμοι ανάλογοι με τους δικούς μας φυσικούς νόμους; Μερικοί μάλιστα έφτασαν στο σημείο να πουν ότι σε τέτοιους φανταστικούς κόσμους θα μπορούσαν και τα Μαθηματικά



Σχήμα Α'.2: Οι τρεις κόσμοι κατά τον Penrose, ο φυσικός κόσμος, ο κόσμος της νοήσεως και ο κόσμος των ιδεών.

ακόμη να είναι διαφορετικά.

Είναι όλα αυτά επιστήμη, ή φιλοσοφία της επιστήμης; Θα μπορούσε να πει κανείς ότι η φαντασία δημιουργεί τέχνη και στην τέχνη όλα επιτρέπονται. Ίσως για αυτό το λόγο ο Hawking (1942-2018) στο τελευταίο του βιβλίο *The Grand Design* (2010) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι “η φιλοσοφία είναι νεκρή”. Και επειδή ο Hawking έκανε μία προσπάθεια να κατανοήσει τη μυστηριώδη θεωρία Μ των υπερχορδών (θεωρία που έχει πάνω από 10^{300} εκδοχές και δεν έχει καν διατυπωθεί ακόμη) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το Σύμπαν δεν είναι ένα, αλλά οτιδήποτε μπορεί να φανταστεί κανείς. Αλλά μία τέτοια θεώρηση δεν μπορεί να θεωρηθεί βεβαίως Φυσική θεωρία. Γιατί η Φυσική υποτίθεται ότι ερευνά τη φύση, κάτι που είναι μία πραγματικότητα έξω από τον άνθρωπο. Και ο άνθρωπος απλώς προσπαθεί να κατανοήσει την πραγματικότητα αυτή. Ακόμη και τα Μαθηματικά προσπαθεί να τα κατανοήσει με κάποιον αντικειμενικό τρόπο, με τα αξιώματα και τη λογική, με την παραδοχή ενός κόσμου ιδεών, όπως τον κόσμο του Πλάτωνος, πάντως όχι απλώς και μόνο με τις επιθυμίες του.

Ένα άλτο μέχρι σήμερα βασικό πρόβλημα της Φυσικής είναι το γιατί υπάρχουν φυσικοί νόμοι, νόμοι που διέπουν όλο το Σύμπαν και έχουν μαθηματική δομή. Και στο πρόβλημα αυτό δεν έχει δοθεί λύση μέχρι σήμερα και είναι αμφίβολο αν θα δοθεί λύση ποτέ. Αλλά υπάρχουν δύο ακόμη βασικά προβλήματα. Το πώς η φύση δημιουργεί ανθρώπινα όντα που έχουν νόηση (και συναισθήματα και αξίες) και πώς η νόηση αυτή επικοινωνεί με τον κόσμο του Πλάτωνος. Ο Penrose κατασκεύασε ένα σχήμα (Σχ. Α'.2) όπου παριστάνει τρεις κόσμους, τον φυσικό κόσμο, τον κόσμο της νοήσεως και τον κόσμο των ιδεών. Ο φυσικός κόσμος αντιστοιχεί σε ένα μέρος του κόσμου των ιδεών (βέλος 1), ο κόσμος της νοήσεως δημιουργείται ως μέρος του φυσικού κόσμου (βέλος 2) και ο κόσμος των ιδεών του Πλάτωνος εμφανίζεται ως μέρος του κόσμου της νοήσεως (βέλος 3). Αλλά οι σχέσεις μεταξύ των τριών κόσμων αποτελούν άλτα ακόμη προβλήματα. Αυτά τα προβλήματα διέπουν τις βασικές αρχές της φιλοσοφίας της Φυσικής και των Μαθηματικών.

Β' Ο ρόλος του δυναμικού στην Κβαντική Μηχανική Bohm

Γεώργιος Κοντόπουλος και Αθανάσιος Τζέμος

Β'.1 Περίληψη

Στην Κβαντομηχανική Bohm το ολικό δυναμικό V_{tot} ενός κβαντικού συστήματος αποτελείται από το κλασικό δυναμικό V και από το κβαντικό δυναμικό $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\Psi|}{|\Psi|}$, όπου Ψ είναι μια λύση της εξίσωσης Schrödinger. Το κβαντικό και το ολικό δυναμικό απειρίζονται ($Q = V_{tot} = -\infty$) εις τα κομβικά σημεία όπου $\Psi = \Psi_{Real} + i\Psi_{imaginary} = 0$. Πλησίον κάθε κομβικού σημείου υπάρχει ένα ασταθές σημείο X , το οποίο είναι ακίνητο ως προς το κομβικό σημείο. Το σημείο X είναι πολύ κοντά στο μέγιστο Q_{max} , το οποίο είναι θετικό και είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μικρότερη είναι η απόσταση μεταξύ των X και N . Όταν το X τείνει στο N η προεξοχή γύρω από το Q_{max} γίνεται πολύ απότομη, ενώ το Q_{max} και το V_{tot} τείνουν στο θετικό άπειρο.

Στην παρούσα εργασία μελετούμε τη μορφή του κβαντικού δυναμικού στις περιοχές πλησίον των κόμβων, όπου παράγεται το χάος, με τη βοήθεια ενός διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή που αντιστοιχεί στο κλασικό δυναμικό $V = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)$.

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις κυματοσυναρτήσεων 1) με ένα μόνο κομβικό σημείο 2) με άπειρα κομβικά σημεία σε μια ευθεία και 3) με πεπερασμένο αριθμό διάσπαρτων κομβικών σημείων.

Β'.2 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις κινήσεως των κβαντικών σωματίων στην μηχανική Bohm (Bohm, 1952a,b) είναι:

$$m \frac{dx}{dt} = \hbar \Im \left(\frac{\nabla \Psi}{\Psi} \right), \quad (2.1)$$

όπου $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck, m είναι η μάζα του σωματίου και $\Im$ το σύμβολο του φανταστικού μέρους. Τέλος Ψ είναι η κυματοσυνάρτηση, δηλαδή μια λύση της εξίσωσης του Schrödinger

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.2)$$

όπου το V είναι το κλασικό δυναμικό. Η Ψ περιγράφει την κατάσταση του συστήματος και, ως μιγαδική ποσότητα, μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$\Psi = R \exp(iS/\hbar), \quad (2.3)$$

όπου R είναι το μέτρο και $S/\hbar$ είναι η φάση.

Αν εισάγουμε την (2.3) στην (2.2) και χωρίσουμε τις πραγματικές από τις φανταστικές ποσότητες, τότε προκύπτει ότι:

$$\dot{R} + \frac{1}{2m} [2\nabla R \nabla S + R \nabla^2 S] = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} + [Q + V] = 0 \quad (2.5)$$

Η πρώτη εξίσωση είναι μια εξίσωση συνέχειας. Η δεύτερη είναι μια τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi, με μόνη διαφορά από την αντίστοιχη κλασική την ύπαρξη του όρου Q με

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\nabla^2 R}{R} \right). \quad (2.6)$$

Το Q είναι το λεγόμενο κβαντικό δυναμικό και έχει κεντρική σημασία στην κβαντομηχανική Bohm. Με την εισαγωγή του κβαντικού δυναμικού οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνουν τη χαμιλτόνια μορφή:

$$\dot{p}_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (2.7)$$

όπου

$$H = T + V_{tot} \quad (2.8)$$

και

$$V_{tot} = V + Q, \quad (2.9)$$

T είναι η κινητική ενέργεια και V_{tot} το ολικό δυναμικό, δηλαδή το άθροισμα του κλασικού δυναμικού V και του κβαντικού δυναμικού Q .

Εκ πρώτης όψεως υπάρχει μια διαφορά μεταξύ των εξισώσεων (2.1) που είναι πρώτης τάξεως και των εξισώσεων (2.7) που είναι δευτέρας τάξεως. Εν τούτοις αποδεικνύεται (Holland (1995)) ότι οι λύσεις είναι οι ίδιες, αν στην δεύτερη περίπτωση θεωρήσουμε όχι μόνον τις ίδιες αρχικές θέσεις (x_0, y_0) , αλλά και ειδικές αρχικές ταχύτητες $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ που ικανοποιούν αρχικά τις εξισώσεις (2.1).

Είναι ενδιαφέρον να μελετηθούν οι εξισώσεις (2.7) οι οποίες μας δίνουν τις εκτροπές των τροχιών από τις τροχιές του κλασικού προβλήματος με Χαμιλτονιανή $H = T + V$. Οι εκτροπές είναι μικρές όταν το Q είναι μικρό σε σχέση με το κλασικό δυναμικό, πράγμα το οποίο συμβαίνει, εν γένει, μακριά από τα κομβικά σημεία της κυματοσυναρτήσεως, δηλαδή τα σημεία στα οποία είναι

$$\Psi = 0 \Rightarrow \Psi_{Real} = \Psi_{Imaginary} = 0. \quad (2.10)$$

Όταν όμως οι τροχιές πλησιάζουν τα κομβικά σημεία το κβαντικό δυναμικό Q είναι πολύ πιο σημαντικό από το κλασικό δυναμικό V και οι τροχιές εκτρέπονται κατά πολύ από τις αντίστοιχες κλασικές τροχιές με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Τότε οι κβαντικές τροχιές γίνονται χαοτικές, ενώ οι αντίστοιχες κλασικές μπορεί να είναι οργανωμένες. Αυτό ακριβώς συμβαίνει όταν το κλασικό δυναμικό οφείλεται σε δύο αρμονικούς ταλαντωτές

$$V = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2). \quad (2.11)$$

Πολλοί ερευνητές (Sanz (2019); Loprore and Wyatt (1999); Kohout (2002); Riggs (2008); Goldstein and Struyve (2014); Dennis, de Gosson and Hiley (2015); Hojman, Asenjo, Moya-Cessa et al. (2021)) μελέτησαν το κβαντικό δυναμικό αλλά, όπως φαίνεται, κανείς δεν έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στις περιοχές πλησίον των κομβικών σημείων. Εν γένει σημείωσαν μόνον ότι το Q απειρίζεται εις τα κομβικά σημεία. Όπως όμως θα δούμε στη συνέχεια, η συμπεριφορά του Q και του V_{tot} πλησίον των κομβικών σημείων παρουσιάζει πολύ ιδιαίζουσα μορφή, με κύριο χαρακτηριστικό την ύπαρξη μεγίστων του Q και του V_{tot} πλησίον των κόμβων, ενώ ακριβώς εις τους κόμβους το Q και το V_{tot} ευρίσκονται εις το αρνητικό άπειρο ($-\infty$), δηλαδή έχουν ελάχιστο.

Εις την παρούσα μελέτη εξετάζουμε 3 περιπτώσεις: (1) την περίπτωση που υπάρχει ένα κομβικό σημείο (2) την περίπτωση απείρων κομβικών σημείων κατά μήκος μιας ευθείας και (3) την περίπτωση διάσπαρτων κομβικών σημείων. Εις τους αριθμητικούς έχουμε λάβει $m = \hbar = \omega_1 = 1$.

Β.3 Χάος πλησίον ενός κομβικού σημείου

Πλησίον ενός κομβικού σημείου $N = (x_N, y_N)$ υπάρχει ένα ασταθές σημείο X (Efthymiopoulos, Kalapotharakos and Contopoulos (2007, 2009)), το οποίο έχει την ίδια ταχύτητα με τον κόμβο $(\dot{x}_N, \dot{y}_N)$, δηλαδή είναι ακίνητο στο σύστημα αναφοράς με κέντρο το κομβικό σημείο $u = x - x_N, v = y - y_N$. Εις το σύστημα αναφοράς (u, v) οι εξισώσεις που δίνουν το X είναι:

$$\frac{du}{dt} = F_u(u, v, t) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{dv}{dt} = F_v(u, v, t) = 0 \quad (2.13)$$

Αποδεικνύεται ότι το σημείο X είναι υπερβολικό, δηλαδή έχει 2 αντίθετες διευθύνσεις απομακρύνσεως και 2 αντίθετες διευθύνσεις προσεγγίσεως (Σχ. Β.1). Οι τροχιές των σωματίων που πλησιάζουν το σημείο X εκτρέπονται προς τις 2 διευθύνσεις απομακρύνσεως. Επομένως 2 γειτονικές τροχιές είναι να δυνατόν να εκτραπούν προς αντίθετες διευθύνσεις και επομένως δημιουργείται χάος (Efthymiopoulos, Kalapotharakos and Contopoulos (2007, 2009)).

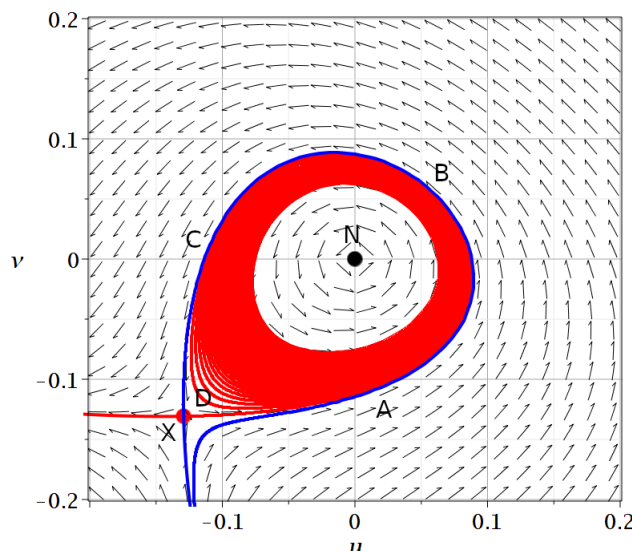
Αν θεωρήσουμε ότι η χρονική εξέλιξη της Bohmian ροής γύρω από ένα κομβικό σημείο μεταβάλλεται πολύ αργά μέσα σε ένα χρονικό διάστημα, τότε μπορούμε να “παγώσουμε” τον χρόνο t και να εργαστούμε με το αυτόνομο σύστημα

$$\frac{du}{ds} = F_u(u(s), v(s); t) \quad (2.14)$$

$$\frac{dv}{ds} = F_v(u(s), v(s); t), \quad (2.15)$$

στο οποίο οι τροχιές εξελίσσονται σε ένα νέο χρόνο s . Αυτή είναι η λεγόμενη αδιαβατική προσέγγιση και μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε την τοπολογία της Bohmian ροής στις περιοχές που παράγεται το χάος.

Ειδικότερα οι τροχιές που ξεκινούν από το σημείο X κατά μήκος των ασυμπτωτικών διευθύνσεων, αποτελούν τις ασυμπτωτικές καμπύλες (Σχ. Β.1). Μια ασυμπτωτική καμπύλη προσεγγίζει το κομβικό σημείο N (εις το Σχ. Β.1 αυτή είναι μια



Σχήμα Β'1: Το πεδίο ταχυτήτων Bohm στο σύστημα (u, v) (βέλη), το ασταθές σημείο ισορροπίας X και οι ασυμπτωτικές καμπύλες του για τον χρόνο $t = 1.27$.

ασταθής ασυμπτωτική καμπύλη (κόκκινη), που κινείται σπειροειδώς προς τον κόμβο και προσεγγίζει τον κόμβο σε άπειρο χρόνο s). Μια ευσταθής ασυμπτωτική καμπύλη, προς τα δεξιά, περιβάλλει την σπειροειδή τροχιά γύρω από το N και διαφεύγει προς τα κάτω σε αρνητικό χρόνο s (μπλέ). Οι άλλες δύο ασυμπτωτικές καμπύλες (κόκκινη προς τα αριστερά και μπλε προς τα κάτω), εκτείνονται κατ' ευθείαν από το X προς μεγάλες αποστάσεις (ενδεχομένως προς το άπειρο). Εις την περίπτωση αυτή ο κόμβος είναι ελκυστής, ενώ σε άλλες περιπτώσεις είναι απωθητής. Η τοπολογία των ελκυστών και των απωθητών N έχει μελετηθεί λεπτομερώς (Κοντόπουλος, Τζέμος και Ζουλούμη (2019)).

Τροχιές σωματίων πλησίον του X σε πραγματικό χρόνο t πλησιάζουν τις ασυμπτωτικές τροχιές για ένα χρονικό διάστημα. Αλλά προϊόντος του χρόνου t οι ασυμπτωτικές καμπύλες μεταβάλλονται και τελικά οι πραγματικές τροχιές σε χρόνο t απομακρύνονται από την περιοχή του X και του κόμβου N . Εις τα Σχ. Β'2ab έχουμε μια τροχιά στο σύστημα (u, v) , γύρω από το κομβικό σημείο N (πράσινη). Συγχρόνως έχουμε σχεδιάσει τις ασυμπτωτικές καμπύλες για δύο χρονικές στιγμές $t = 1.31$ και $t = 1.38$. Παρατηρούμε ότι το σημείο X και οι ασυμπτωτικές του καμπύλες έχουν αλλάξει θέση ως προς το N . Εις το Σχ. Β'2a η τροχιά του σωματίου (πράσινη) είναι για ένα διάστημα κοντά στην μπλε ασυμπτωτική καμπύλη που υπολογίστηκε κατά τον χρόνο $t = 1.31$. Το κβαντικό σωματίο (κίτρινο) αυτή τη στιγμή είναι κοντά στο πλησιέστερο σημείο της τροχιάς από το N . Εξ' άλλου στο Σχ. Β'2b η τροχιά είναι έξω από την ασυμπτωτική καμπύλη που αντιστοιχεί στο χρόνο $t = 1.38$ και το κίτρινο σωματίο είναι λίγο πριν την έξοδο του από την περιοχή NX .

Επειδή το κομβικό σημείο N κινείται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα (x, y) οι τροχιές των σημείων N και X , καθώς και η τροχιά του κομβικού σημείου έχουν τη μορφή του Σχ. Β'3. Δηλαδή το κβαντικό σωματίο κάνει έναν αριθμό σπειροειδών περιστροφών γύρω από το κινούμενο κομβικό σημείο N , αλλά τελικώς απομακρύνεται από την περιοχή των N και X .

Β.4 Κβαντικό δυναμικό και ολικό δυναμικό στην περίπτωση ενός κόμβου

Ένα παράδειγμα κυματοσυναρτήσεως με έναν μόνον κόμβο είναι το εξής (Contopoulos, Efthymiopoulos and Harsoula (2008)):

$$\Psi = \exp\left(-\frac{1}{2}[x^2 + cy^2 + i(1+c)t]\right) (1 + ax \exp(-it) + b\sqrt{c}xy \exp(-(1+c)t)), \quad (2.16)$$

όπου $c = \sqrt{2}/2$. Η θέση του κομβικού σημείου στην περίπτωση αυτή δίνεται από τις σχέσεις

$$x_N = -\frac{\sin((1+c)t)}{a \sin(ct)}, \quad (2.17)$$

$$y_N = -\frac{a \sin(t)}{b\sqrt{c} \sin((1+c)t)}. \quad (2.18)$$

Στο Σχ. Β.1 δίνεται η θέση του κόμβου N και του σημείου X στο χρόνο $t = 1.27$.

Στην παρούσα περίπτωση το μέτρο $R = |\Psi|$ της κυματοσυνάρτησης μπορεί να γραφεί ως

$$R = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + cy^2)\right) \sqrt{G}, \quad (2.19)$$

όπου

$$G = 2ab\sqrt{c}x^2y \cos(tc) + b^2cx^2y^2 + 2b\sqrt{c}xy \cos((1+c)t) + a^2x^2 + 2ax \cos(t) + 1. \quad (2.20)$$

Κατά συνέπεια το κβαντικό δυναμικό μπορεί να γραφεί ως:

$$Q = \frac{1}{8G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{4G} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{8G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{x}{2G} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{c^2y}{2G} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{1}{2}(x^2 + c^2y^2 - (c+1)), \quad (2.21)$$

Διαπιστώνουμε ότι το G μηδενίζεται εις το κομβικό σημείο, $G = 0$, οπότε το κβαντικό δυναμικό Q ισούται με $Q_0 = -\infty$.

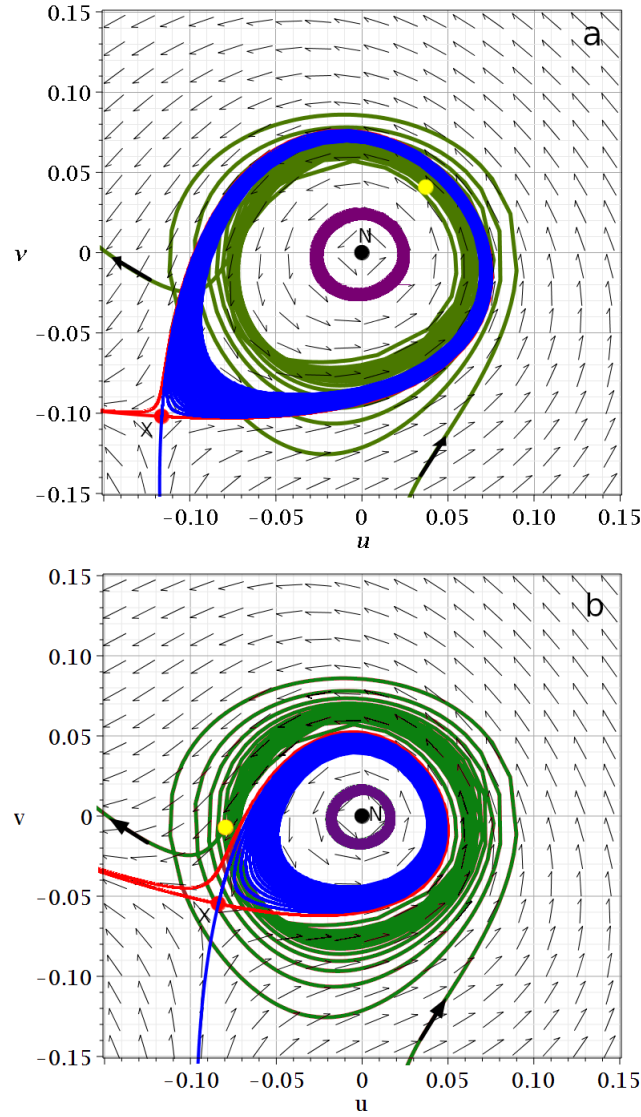
Για μικρές τώρα εκτροπές (u, v) από το κομβικό σημείο, προκύπτει μετά από πράξεις ότι:

$$G(u, v) = \frac{a^2 \sin^2(ct) u^2}{\epsilon^2} - 2b\sqrt{c}uv \cos((1+c)t) + \frac{b^2 c \epsilon^2 v^2}{a^2 \sin^2(ct)} \quad (2.22)$$

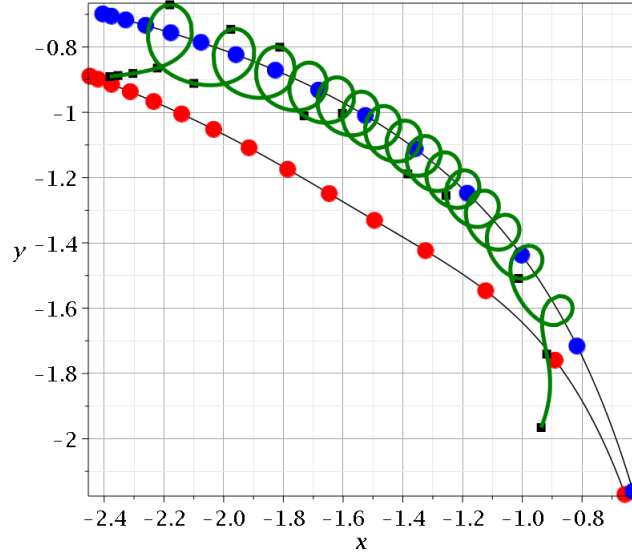
όπου

$$\epsilon = \sin[(1+c)t] \quad (2.23)$$

Όταν το ϵ τείνει στο 0 (οπότε ο χρόνος ισούται με $t = k\pi/(1+c)$, ($k = 1, 2, 3, \dots$)) το x_N τείνει στο 0 ενώ το y_N τείνει στο άπειρο και το Q παίρνει μεγάλες τιμές αρνητικές και θετικές.



Σχήμα Β'.2: Μια τροχιά (πράσινη) με αρχικές συνθήκες ($u_0 \simeq 0.02349, v_0 \simeq -0.19176$) που πα-
γιδεύεται γύρω από το κομβικό σημείο N (μαύρη κουκίδα) για ένα χρονικό διάστημα. Επίσης
σημειώνονται το ασταθές σημείο X (κόκκινη κουκίδα) και οι ασυμπτωτικές του για τους χρόνους
a) $t = 1.31$, και b) $t = 1.38$. Η θέση του σημείου της τροχιάς για τους χρόνους αυτούς δίνεται με
κίτρινο χρώμα.



Σχήμα Β'.3: Η τροχιά του Σχ. Β'.2 στο αδρανειακό σύστημα (x, y) καθώς και οι τροχιές του κομβικού σημείου (μπλε) και του σημείου X (κόκκινο στο σύστημα (x, y)). Δίδονται οι θέσεις των σημείων N και X για τους χρόνους όπου $t = 0.1, 0.2, \dots, 1.5$, αρχίζοντας από πάνω αριστερά.

Εις τα Σχ. Β'.4a,b,c δίνεται η μορφή του Q κοντά στο κομβικό σημείο συναρτήσει της συντεταγμένης u , κατά μήκος της διεύθυνσεως XN , για τους χρόνους 1.27, 1.6, 1.75. Εις το κομβικό σημείο N η τιμή της Q είναι $Q_0 = -\infty$. Το Q όμως γίνεται θετικό πλησίον και αριστερά του N , δηλαδή για $u < 0$. Το μέγιστο του Q βρίσκεται πολύ κοντά στο N στο επίπεδο (u, v) , και είναι τόσο μεγαλύτερο όσο ο χρόνος t αυξάνει και πλησιάζει στην κρίσιμη τιμή $t = \pi/(1+c) = 1.84$. Συγκεκριμένα, για $t = 1.27$ έχουμε $Q_{max} = 5.10$, για $t = 1.6$ $Q_{max} = 68.75$ και για $t = 1.75$ $Q_{max} = 3378$. Οι δε τιμές του Q στο εκάστοτε σημείο X είναι πολύ κοντά προς το Q_{max} . Συγκεκριμένα στο σημείο X είναι $Q_X = 5.04$ για $t = 1.27$, $Q_X = 67.848$ για $t = 1.6$ (πλησιέστερα προς το Q_{max}) και για $t = 1.75$ ουσιαστικά το Q_X ταυτίζεται με το Q_{max} . Για τιμές του t πλησιέστερα προς την κρίσιμη τιμή $t = 1.84$ το Q_{max} γίνεται τόσο μεγάλο ώστε ο υπολογιστής δεν μπορεί να δώσει ακριβή αποτελέσματα. Πάντως φαίνεται ότι όταν ο χρόνος t τείνει στο 1.84 η τιμή της Q_{max} τείνει στο $+\infty$. Συγχρόνως παρατηρούμε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνει η απόσταση του σημείου X από το κομβικό σημείο N μικραίνει και τείνει στο 0 στο $t = 1.84$. Επομένως και η θέση του μεγίστου Q πλησιάζει όλο και περισσότερο το κομβικό σημείο και η μετάβαση από το $Q_0 = -\infty$ στο Q_{max} είναι πολύ απότομη. Στην οριακή περίπτωση $t = \pi/(1+c)$ έχουμε $Q_0 = -\infty$ και $Q_{max} = +\infty$.

Ένας προσεγγιστικός αναλυτικός υπολογισμός δίνεται αν πάρουμε τους πιο σημαντικούς όρους των τύπων (2.20-2.22) για $v = 0$ και για μικρά u . Τότε διαπιστώνουμε ότι οι σημαντικότεροι όροι του Q κατά τις δυνάμεις του u είναι

$$Q = -\frac{P_1 \epsilon^6}{u^2} - \frac{P_2 \epsilon}{u}, \quad (2.24)$$

όπου τα P_1, P_2 είναι θετικοί αριθμοί και συγκεκριμένα

$$P_1 = \frac{b^2 c}{2a^4 \sin^4(ct)} \quad (2.25)$$

$$P_2 = \frac{\sin(ct) - c \sin(t) \cos((1+c)t)}{a \sin^2(ct)} - \frac{b^2 c \epsilon^2}{a^3 \sin^3(ct)}, \quad (2.26)$$

με $a = b = 1, c = \sqrt{2}/2$. Επομένως για $u > 0$ το Q είναι αρνητικό, ενώ για αρνητικά u , το Q είναι μεν αρνητικό για πολύ μικρά $|u|$, αλλά γίνεται θετικό για $|u| > u_0 = P_1 \epsilon^5 / P_2$ και αρνητικό για μεγάλα αρνητικά u . Στο μέγιστο Q κατά μήκος της ευθείας $v = 0$ είναι $dQ/du = 0$, οπότε προκύπτει

$$u_m = -2u_0 \quad (2.27)$$

και

$$Q_{max} = \frac{P_2 \epsilon}{4u_0}. \quad (2.28)$$

Συγκεκριμένα για τους χρόνους $t = 1.27, 1.6, 1.75$ έχουμε τις τιμές του Πίνακα 1.

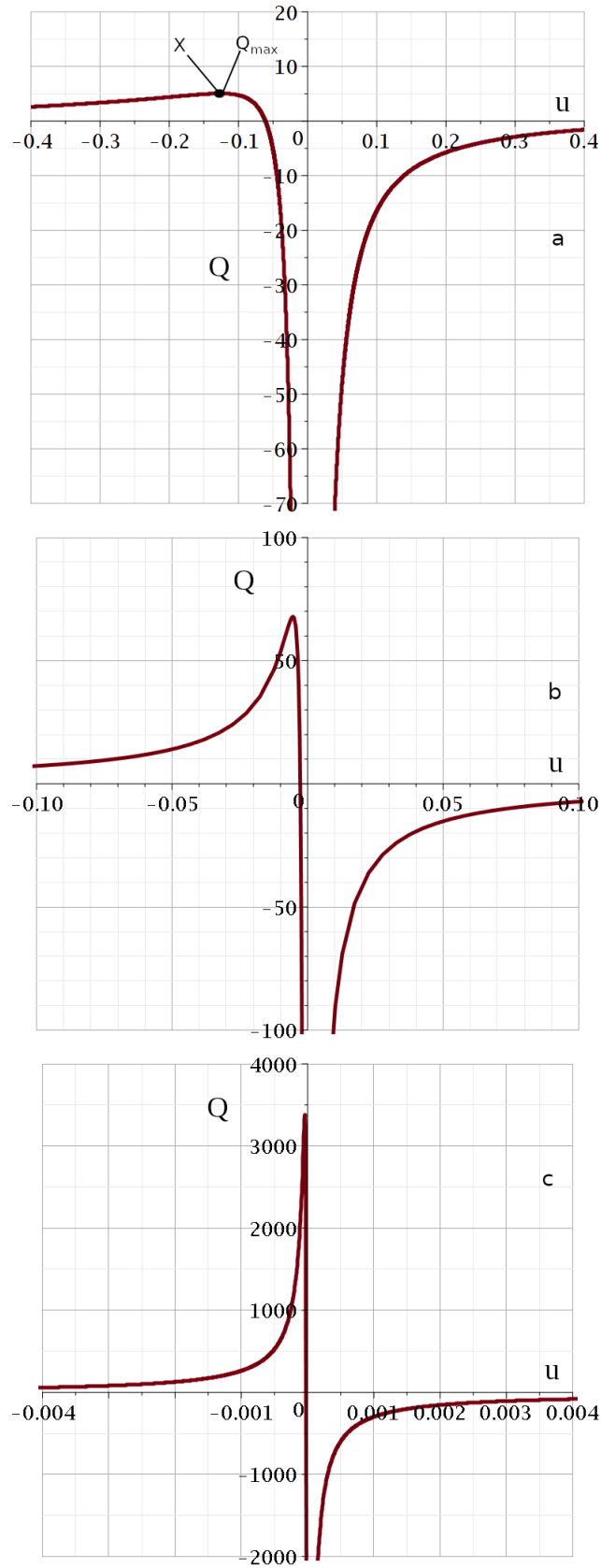
t	ϵ	P_1	P_2	u_0	$Q_{max}(v=0)$	$\bar{Q}_{max}^{v=0}$	Q_{max}	Q_X
1.27	0.827	0.945	0.889	0.411	0.45	1.19	5.10	5.04
1.6	0.399	0.527	1.745	0.030	57.07	65.96	67.851	67.849
1.75	0.154	0.443	1.808	2.1×10^{-5}	3317.34	3376.48	3378.39	3378.39

Πίνακας 1.1: Οι τιμές των $P_1, P_2, u_0, Q_{max}(v=0), \bar{Q}_{max}^{v=0}, Q_{max}$ και Q_X για τρεις διαφορετικούς χρόνους.

Οι θεωρητικές τιμές του μέγιστου Q κατά τον άξονα $v = 0$ ($\bar{Q}_{max}^{v=0}$) που δίνονται από τον προσεγγιστικό τύπο (2.28) είναι της ίδιας τάξεως με τις ακριβείς τιμές $Q_{max}(v=0)$ που δίνονται από τους τύπους (2.20-2.21) για $v = 0$. Οι μικρές διαφορές οφείλονται στο ότι στην προσέγγιση (2.24) παρελήφθησαν όροι ανωτέρας τάξεως ως προς ϵ και u . Είναι πάντως αξιοσημείωτο ότι οι ακριβείς τιμές των $Q_{max}, \bar{Q}_{max}^{v=0}$ και Q_X διαφέρουν ελάχιστα στην περίπτωση $t = 1.75$ που πλησιάζει προς την οριακή τιμή $t = 1.84$.

Παρατηρούμε ότι το Q είναι αρνητικό πολύ κοντά στο N και τείνει εις το $Q_0 = -\infty$. Επίσης το μέγιστο του Q είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μικρότερο είναι το ϵ . Στην περίπτωση του Σχ. Β'.4a ($t = 1.27$) το $\epsilon = 0.83$. Τότε το $Q_{max} = 5.10$. Το X είναι πολύ κοντά στο μέγιστο Q και έχει $Q_X = 5.04$. Στην περίπτωση του Σχ. Β'.4b ($t = 1.6$) το ϵ είναι μικρό ($\epsilon = 0.40$) και το $Q_{max} = 67.851$, ενώ η τιμή του Q στο X είναι $Q_X \simeq 67.848$ (ακόμη πιο κοντά στο Q_{max}). Τέλος στην περίπτωση του Σχ. Β'.4c ($t = 1.75$) το $\epsilon = 0.15$. Τότε το μέγιστο Q είναι πολύ μεγαλύτερο $Q_{max} = 3378$ και το X είναι πολύ κοντά στο μέγιστο, με πρακτικά Q ίσο με Q_{max} .

Στα Σχ. Β'.5a,b δίνεται η μορφή της επιφανείας Q στις περιπτώσεις $t = 1.27$ και $t = 1.6$. Στο Σχ. Β'.5a παρατηρούμε ότι μακριά από το κομβικό σημείο η επιφάνεια



Σχήμα Β'.4: Η τιμή του Q κατά μήκος της ευθείας XN συναρτήσει του u κατά τους χρόνους (a) $t = 1.27$, (b) $t = 1.6$ και (c) $t = 1.75$.

Q είναι ομαλή. Κοντά όμως στο κομβικό σημείο υπάρχει ένας σωλήνας που φθάνει στο αρνητικό άπειρο. Το ασταθές σημείο X (κόκκινο σφαιρίδιο) είναι λίγο πάνω από το 0. Από αυτό ξεκινάει μια ασταθής ασυμπτωτική καμπύλη (κόκκινη) προς το κομβικό σημείο, που έχει σπειροειδή μορφή όταν προβάλλεται στο επίπεδο (x, y) (Σχ. Β'.1), επί της οποίας έχουμε μεγάλες μεταβολές του κβαντικού δυναμικού Q . Συγκεκριμένα, από το $Q_X = 5$ κατέρχεται σε ένα ελάχιστο $Q = -203$ στο σημείο A , κατόπιν ανέρχεται σε ένα δευτερεύον μέγιστο $Q = -39$ στο σημείο B , κατέρχεται σε ένα δευτερεύον ελάχιστο $Q = -180$ στο σημείο C και φθάνει σε ένα δευτερεύον μέγιστο στο σημείο D κοντά στο σημείο X (τα σημεία A, B, C, D σημειώνονται και στο Σχ. Β'.1). Η καμπύλη αυτή συνεχίζει σε ολοένα μικρότερα δευτερεύοντα ελάχιστα, μέγιστα, ελάχιστα, μέγιστα και τελικά μετά από άπειρο χρόνο s φθάνει στο κομβικό σημείο N στο $Q = -\infty$.

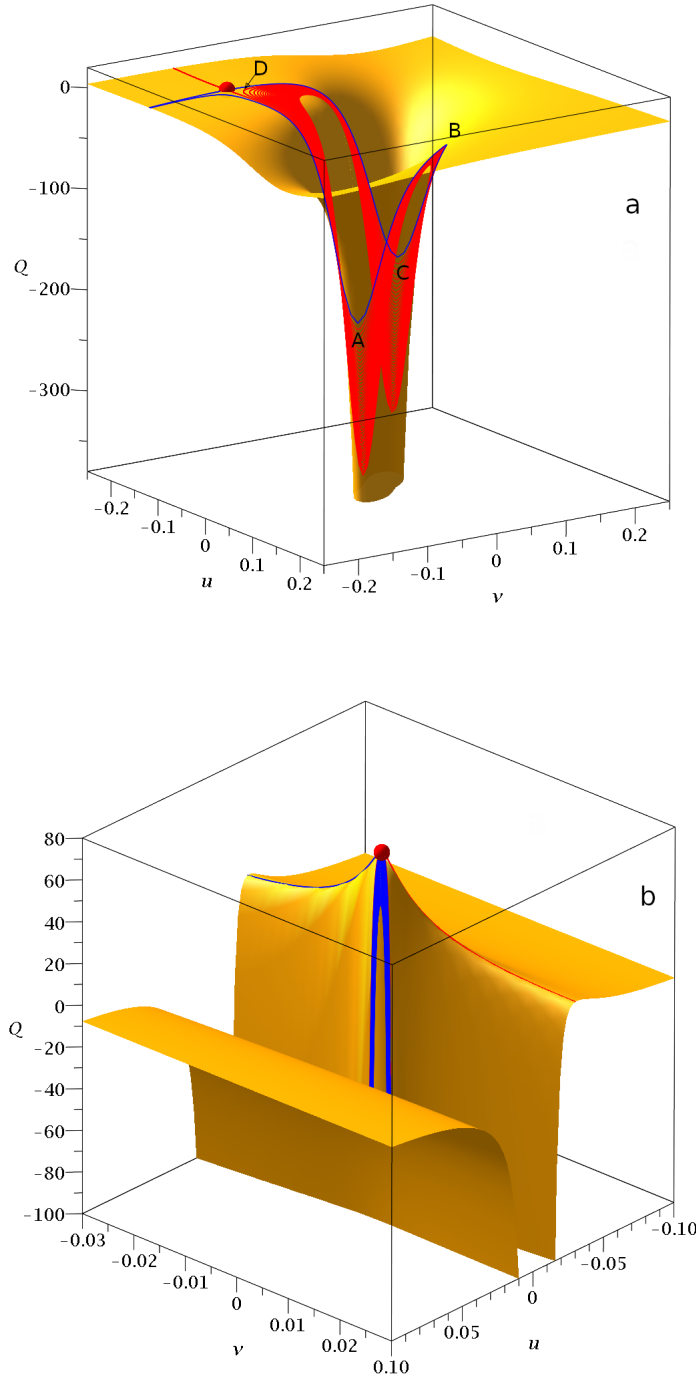
Οι άλλες ασυμπτωτικές καμπύλες εκτείνονται στο άπειρο αριστερά, όπως φαίνεται καλύτερα στο Σχ. Β'.5a (μια ευσταθής καμπύλη (μπλε) κάνει μια περιστροφή γύρω από τον κόμβο και κατόπιν διαφεύγει προς τα αριστερά).

Εις το Σχ. Β'.5b, όπου παρίσταται το κβαντικό δυναμικό στην περίπτωση του χρόνου $t = 1.6$, παρατηρούνται ανάλογα φαινόμενα, αλλά πιο έντονα. Π.χ. το σημείο X βρίσκεται πολύ κοντά στο μέγιστο Q που είναι η κορυφή μιας σημαντικής προεξοχής της επιφανείας Q . Στην περίπτωση αυτή το κομβικό σημείο είναι απωθητής, επομένως η ασυμπτωτική καμπύλη που το πλησιάζει είναι ευσταθής (μπλε), δηλαδή πλησιάζει το N σε αρνητικό χρόνο s . Η καμπύλη αυτή ακολουθεί επίσης διαδοχικές τετράδες δευτερευόντων ελαχίστων, μεγίστων, ελαχίστων, μεγίστων, αλλά τα ελάχιστα αυτά είναι πολύ βαθύτερα, της τάξεως -10^7 και ακόμα μικρότερα.

Τέλος, στην περίπτωση $t = 1.75$ το μέγιστο Q είναι $Q_{max} = 3400$. Η επιφάνεια Q σχηματίζει μια προεξοχή με πολύ μικρό πάχος όπως φαίνεται στο Σχ. Β'.4c.

Όταν το t πλησιάζει ακόμη περισσότερο την κρίσιμη τιμή $t = \pi/(1+c) = 1.84$, οι αριθμοί γίνονται τόσο μεγάλοι ώστε ο υπολογιστής δεν μπορεί να δώσει ακριβή αποτελέσματα. Πάντως είναι γνωστό ότι το σημείο X τείνει προς το κομβικό σημείο N καθώς ο χρόνος t τείνει προς το $t = \pi/(1+c)$. Όσον αφορά το μέγιστο Q_{max} , αυτό τείνει στο $+\infty$ όταν $t \rightarrow \pi/(1+c)$. Δηλαδή όταν το X τείνει στο N στην προβολή (x, y) , η τιμή του Q που είναι $Q_0 = -\infty$ στο N , τείνει στο $Q_{max} = +\infty$.

Εξ' άλλου το κλασικό δυναμικό $V = \frac{1}{2}(x^2 + c^2y^2)$ παριστάνει ένα παραβολοειδές (Σχ. Β'.6). Το ελάχιστό του είναι $V = 0$ για $x = y = 0$, ενώ το μέγιστο είναι ∞ όταν το $|x|$ ή το $|y|$ γίνεται άπειρο. Το συνολικό δυναμικό $V_{tot} = V + Q$ είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από το Q στην κεντρική περιοχή που περιλαμβάνει το κομβικό σημείο, καθώς και γύρω από το σημείο X και το μέγιστο Q_{max} . Σε μεγαλύτερες όμως αποστάσεις το Q είναι αρνητικό και το V θετικό, οπότε το V_{tot} είναι μεταξύ των Q και V . Σε μεγάλες αποστάσεις το Q αναπτυσσόμενο γύρω από την μεγαλύτερη δύναμη σε x και y παίρνει τη μορφή $Q = -\frac{1}{2}(x^2 + c^2y^2) + \frac{3}{2}(1+c) + O\left(\frac{1}{y}\right)$, επομένως είναι αρνητικό. Εάν τώρα προστεθεί και το κλασικό δυναμικό $V = \frac{1}{2}(x^2 + c^2y^2)$ το ολικό δυναμικό είναι $V_{tot} = \frac{3}{2}(1+c) + \dots = 2.6$, δηλαδή μια πολύ μικρή θετική ποσότητα.



Σχήμα Β'5: Η επιφάνεια Q στο σύστημα αναφοράς (u, v) για τους χρόνους $a) t = 1.27$ και $b) t = 1.6$. Επί της επιφανείας αυτής υπάρχει το σημείο X . (πολύ κοντά στο Q_{max} και οι ασυμπτωτικές καμπύλες από το X).

Β.5 Άπειρα κομβικά σημεία

Ένα παράδειγμα κυματοσυνάρτησης με άπειρους κόμβους βρήκαμε στην περίπτωση ενός συστήματος δυο qubits της μορφής

$$\Psi = c_1 Y_R(x, t) Y_L(y, t) + c_2 Y_L(x, t) Y_R(y, t), \quad (2.29)$$

όπου

$$Y(x, t) = \left(\frac{\omega_x}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\omega_x}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2}{\omega_x}} a_0 \cos(\sigma_x - \omega_x t) \right)^2 + i \left(\sqrt{2\omega_x} a_0 \sin(\sigma_x - \omega_x t) x + \frac{1}{2} \left[a_0^2 \sin(2(\omega_x t - \sigma_x)) - \omega_x t \right] \right) \right], \quad (2.30)$$

είναι σύμφωνες καταστάσεις (coherent states) του αρμονικού ταλαντωτή Tzemos, Contopoulos and Efthymiopoulos (2019); Tzemos and Contopoulos (2020, 2021), με $\sigma_x = 0$ για το Y_R και $\sigma_x = \pi$ για το Y_L και $a_0 = 5/2, \omega_x = 1$. Ο τύπος για το $Y(y, t)$ είναι όμοιος, μόνον αντί ω_x έχουμε $\omega_y = \sqrt{3}$. Οι κόμβοι δίνονται από τους τύπους:

$$x_N = \frac{\left(K \pi \cos(\omega_y t) + \sin(\omega_y t) \ln \left(\left| \frac{c_1}{c_2} \right| \right) \right)}{2\sqrt{2\omega_x a_0} \sin(\omega_{xy} t)} \quad (2.31)$$

$$y_N = \frac{\left(K \pi \cos(\omega_x t) + \sin(\omega_x t) \ln \left(\left| \frac{c_1}{c_2} \right| \right) \right)}{2\sqrt{2\omega_y a_0} \sin(\omega_{xy} t)}, \quad (2.32)$$

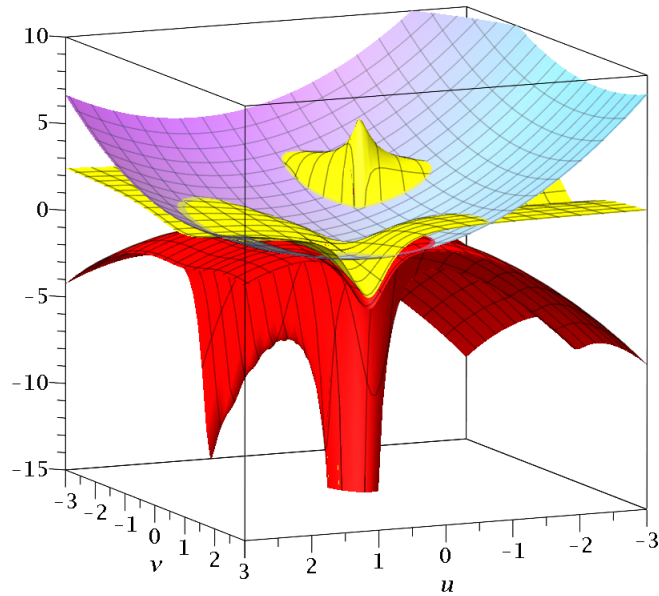
όπου $\omega_{xy} = \omega_x - \omega_y, K = \dots, -3, -1, 1, 3, \dots$, όταν τα c_1, c_2 είναι ομόσημα. Επομένως έχουμε άπειρα κομβικά σημεία, τα οποία είναι σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Η ευθεία αυτή στρέφεται άλλοτε κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού και άλλοτε αντιθέτως. Τα κομβικά σημεία απομακρύνονται στο άπειρο όταν $\sin(\omega_{xy} t) = 0$, δηλαδή όταν $t = k\pi/(1 - \sqrt{3}) (k = 1, 2, \dots)$. Στις δύο πλευρές κάθε κόμβου υπάρχουν δύο ασταθή αμετάβλητα σημεία X , τα οποία είναι ακίνητα ως προς τον κόμβο αυτόν στο σύστημα αναφοράς (u, v) .

Η επιφάνεια του κβαντικού δυναμικού Q έχει ελάχιστα $Q = -\infty$ στους κόμβους και μέγιστα Q (θετικά) πολύ κοντά στα σημεία X . Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχ. Β.7. Τα μέγιστα είναι πιο μεγάλα όταν ο χρόνος είναι κοντά σε μια τιμή $t = k\pi/(1 - \sqrt{3}) = -4.29k (k = \dots, -3, -1, 1, 3, \dots)$.

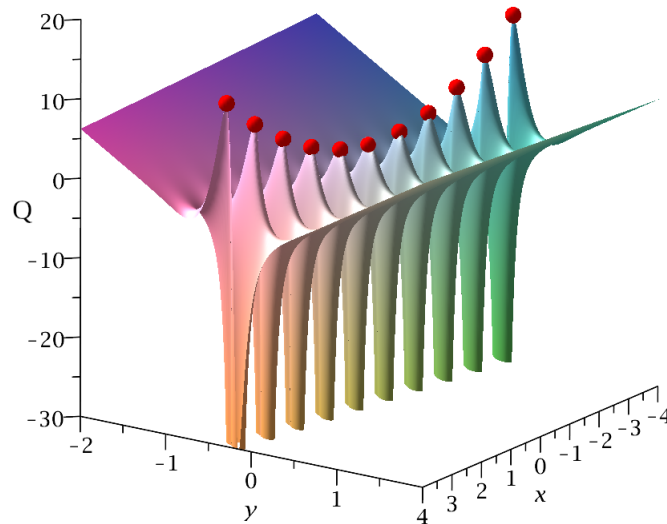
Όπως πάντα, κάθε σημείο X έχει 2 αντίθετες ασταθείς και 2 αντίθετες ευσταθείς ιδιοδιευθύνσεις. Οι τροχιές των σωματιών που πλησιάζουν έναν κόμβο εκτρέπονται προς την μια ή την άλλη ασταθή ιδιοδιεύθυνση, με αποτέλεσμα την εμφάνιση χάους.

Επί των 3 ιδιοδιευθύνσεων έχουμε 4 ασυμπτωτικές καμπύλες, μερικές από τις οποίες δημιουργούν σπείρες γύρω από ορισμένους κόμβους, ενώ άλλες ασυμπτωτικές καμπύλες εκτείνονται εις το άπειρο. Δύο παραδείγματα τέτοιων ασυμπτωτικών καμπύλων δίνονται στο Σχ. Β.8. Στο Σχ. Β.8α βλέπουμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες των σημείων X εκατέρωθεν του κόμβου $K = 1$ στο σύστημα αναφοράς με κέντρο τον ίδιο τον κόμβο $K = 1$. Δύο ασυμπτωτικές καμπύλες (αριστερά του δεξιού X και δεξιά του αριστερού X) δημιουργούν σπείρες γύρω από τον κόμβο.

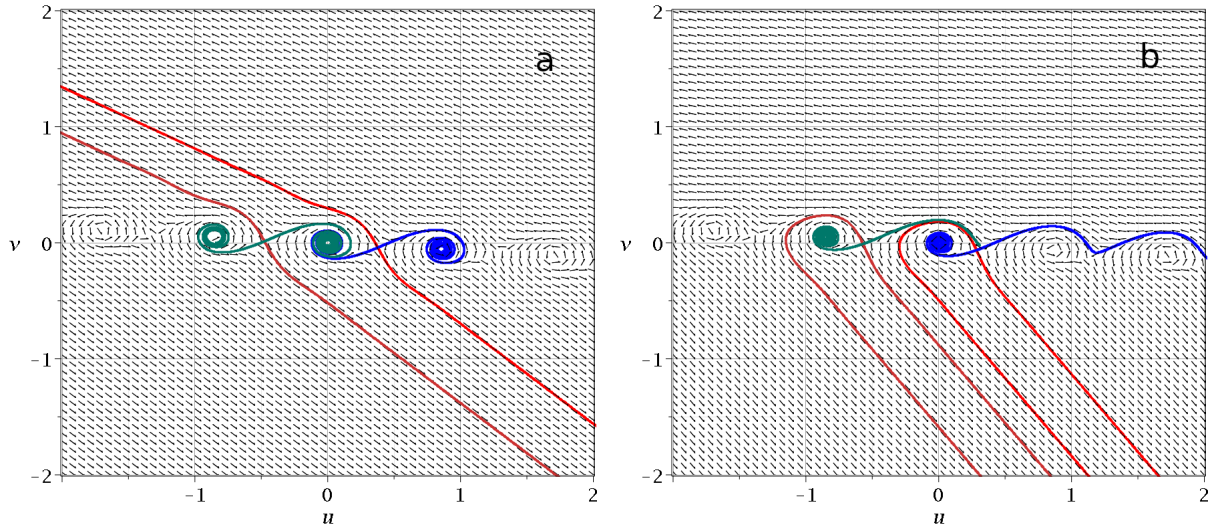
Η αριστερή ασυμπτωτική καμπύλη του αριστερού X δημιουργεί μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = -1$ και η δεξιά ασυμπτωτική του δεξιού κόμβου δημιουργεί



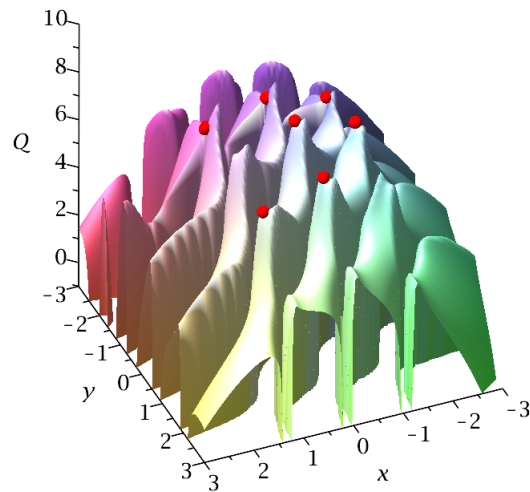
Σχήμα Β'.6: Τα δυναμικά Q (κόκκινο), V (μπλε) και V_{tot} (κίτρινο) κατά τον χρόνο $t = 1.27$. Η ολική επιφάνεια V_{tot} είναι λίγο πιο πάνω από την επιφάνεια Q στην κεντρική περιοχή και ιδιαίτερα πλησίον του σημείου X και του Q_{max} . Σε μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο, το V_{tot} τείνει σε ένα σταθερό επίπεδο $V_{tot} = 2.6$.



Σχήμα Β'.7: Η επιφάνεια Q εις το αδρανειακό σύστημα (x, y) (περίπτωση των απείρων κόμβων). Υπάρχουν άπειρα σημεία X πολύ κοντά στις κορυφές των εξοχών γύρω από τα μέγιστα του Q .



Σχήμα Β'.8: Οι ροές ταχυτήτων (βέλη), δύο σημεία X και οι αμετάβλητες καμπύλες τους στον χρόνο $t = 1.5$. α) Στο σύστημα (u, v) για $K = 1$ και β) στο αντίστοιχο σύστημα για $K = 3$.



Σχήμα Β'.9: Η επιφάνεια Q στην περίπτωση των διάσπαρτων κομβικών σημείων για $t = 0.1$. Διακρίνουμε δύο σημεία X πλησίον των τοπικών μεγίστων του Q στην περιοχή των κόμβων.

μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = 3$. Τέλος, οι ασταθείς ασυμπτωτικές καμπύλες εκτείνονται στο άπειρο, πάνω και κάτω από τον άξονα $v = 0$.

Εξ' άλλου εις το Σχ. Β'.8b τα σημεία X εκατέρωθεν του κόμβου $K = 3$ συμπεριφέρονται διαφορετικά. Η μεν αριστερή ασυμπτωτική καμπύλη του δεξιού σημείου X δημιουργεί μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = 3$, η δεξιά της όμως ασυμπτωτική καμπύλη δεν δημιουργεί μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = 5$, αλλά εκτείνεται στο άπειρο. Ομοίως, η αριστερή ασυμπτωτική καμπύλη από το αριστερό σημείο X δημιουργεί μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = 1$, αλλά η δεξιά ασυμπτωτική της καμπύλη δεν δημιουργεί μια σπείρα γύρω από τον κόμβο $K = 3$, αλλά εκτείνεται στο άπειρο. Τέλος οι ευσταθείς ασυμπτωτικές καμπύλες εκτείνονται εις το άπειρο, αλλά μόνον προς τα κάτω.

Το συμπέρασμα είναι ότι στην περίπτωση αυτή (των απείρων κόμβων) οι ασυμπτωτικές καμπύλες από τα σημεία X συνδέουν κατά περίπλοκο τρόπο τους διαφόρους κόμβους. Και μάλιστα οι συνδέσεις μεταβάλλονται συνεχώς με το χρόνο t . Παρά ταύτα, εις την επιφάνεια του κβαντικού δυναμικού τα σημεία X είναι πάντοτε κοντά στα μέγιστα του δυναμικού, όπως εις το Σχ. Β'.6.

Β.6 Διάσπαρτα κομβικά σημεία

Στην περίπτωση μιας τυχαίας υπέρθεσης των επι μέρους κυματοσυναρτήσεων του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, έχουμε διάσπαρτα και πεπερασμένα στο πλήθος κομβικά σημεία. Ένα τέτοιο παράδειγμα δίνεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x, y, t) = aY_{3,3} + bY_{3,4} + cY_{4,5}, \quad (2.33)$$

όπου

$$Y_{k,l} = \psi_k(x, t)\psi_l(y, t) \quad (2.34)$$

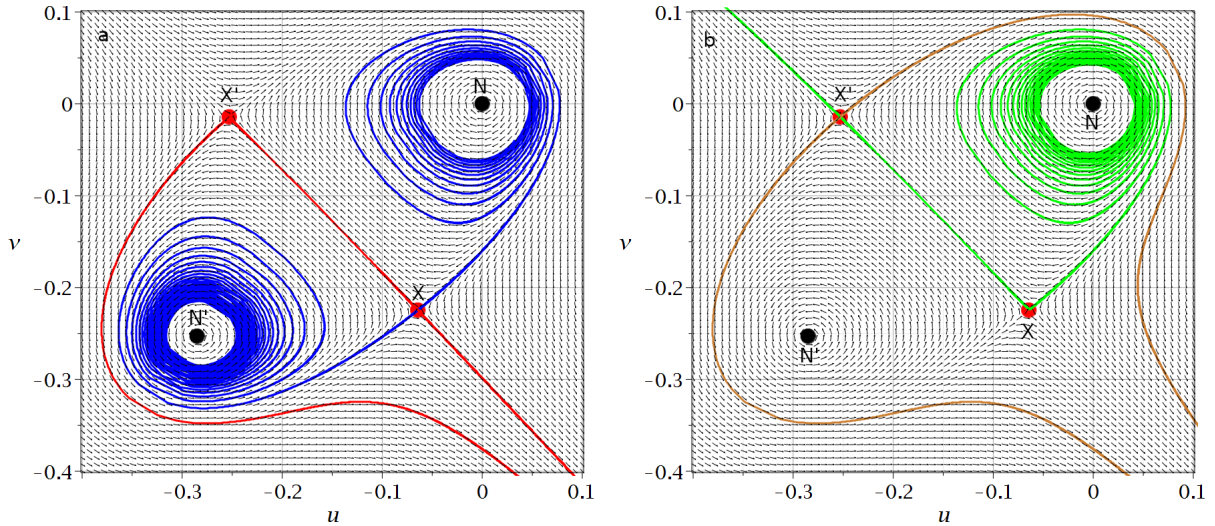
και

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m_x \omega_x}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_x \omega_x x^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m_x \omega_x}{\hbar}} x \right), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.35)$$

με $k = 3, 4, l = 3, 4, 5, \omega_x = 1, \omega_y = \sqrt{2}/2, a = b = 1$ και $c = \sqrt{2}/2$.

Στην περίπτωση αυτή (Σχ. Β'.9) υπάρχουν πολλά κομβικά σημεία αλλά όχι σε ευθεία γραμμή. Η επιφάνεια του κβαντικού δυναμικού γύρω από τα κομβικά σημεία σχηματίζει σωλήνες που εκτείνονται έως το $-\infty$. Αλλά κοντά σε κάθε κομβικό σημείο υπάρχει τουλάχιστον ένα ασταθές σημείο ισορροπίας, ακίνητο προς αυτό το κομβικό σημείο. Από κάθε σημείο X ξεκινούν 4 ασυμπτωτικές καμπύλες (2 ασταθείς και 2 ευσταθείς) και ορισμένες καμπύλες συνδέουν τις διάφορες περιοχές γύρω από τα κομβικά σημεία μεταξύ τους.

Ένα παράδειγμα δίνεται στα Σχ. Β'.10a,b, όπου ένα κομβικό σημείο ευρίσκεται εις την αρχή των συντεταγμένων $u = v = 0$. Πλησίον του σημείου αυτού υπάρχουν 2 ασταθή σημεία ισορροπίας X . Απ' το δεξιό σημείο X αρχίζει μια σπειροειδής (μπλε) ασυμπτωτική καμπύλη, η οποία πλησιάζει σε αρνητικό χρόνο s το σημείο $N = (0, 0)$



Σχήμα Β'.10: Οι ροές ταχυτήτων (βέλη), δύο κομβικά σημεία N και N' , δύο ασταθή σημεία X και X' και οι αμετάβλητες καμπύλες τους στον χρόνο $t = 0.1$ στην περίπτωση των διάσπαρτων κομβικών σημείων της κυματοσυναρτήσεως (2.33).

(Σχ. Β'.10a). Η δεύτερη ευσταθής (μπλε) ασυμπτωτική καμπύλη πλησιάζει σπειροειδώς το αριστερά κομβικό σημείο N' , το οποίο δεν είναι ακίνητο ως προς το δεξιό κομβικό σημείο. Μια ασταθής ασυμπτωτική καμπύλη του δεξιού σημείου X (κόκκινη) κατευθύνεται από το άλλο σημείον X' (πάνω αριστερά) και στρίβει απότομα προς τα αριστερά, περιβάλλει την περιοχή του σημείου N' και διαφεύγει προς τα δεξιά και κάτω. Η άλλη ασταθής ασυμπτωτική καμπύλη κατευθύνεται μακριά, δεξιά και κάτω. Από το αριστερό σημείο X' μια ευσταθής ασυμπτωτική καμπύλη (πράσινη) κατευθύνεται προς το σημείο X και κατόπιν πλησιάζει σπειροειδώς το σημείο N (Σχ. Β'.10b). Μια άλλη ευσταθής καμπύλη (πράσινη) απομακρύνεται προς τα αριστερά και πάνω. Οι 2 ασταθείς ασυμπτωτικές καμπύλες του X' περιβάλλουν τα δύο κομβικά σημεία και απομακρύνονται κατόπιν προς τα δεξιά και κάτω. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες από το X' είναι πολύ κοντά στις ασυμπτωτικές καμπύλες του X , αλλά δεν συμπίπτουν.

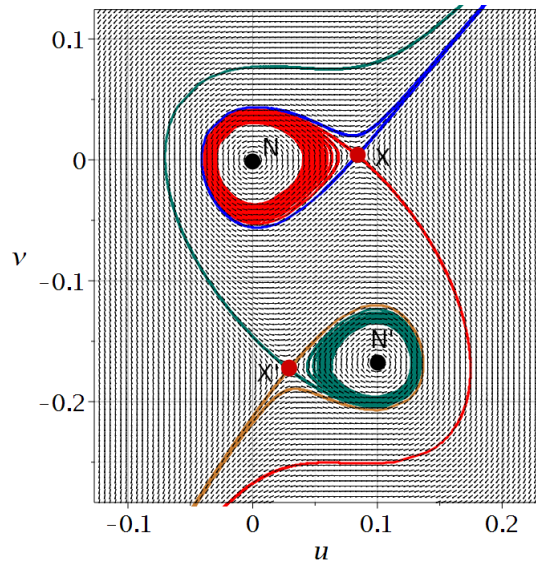
Σε μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό κομβικό σημείο $(0, 0)$ υπάρχουν και άλλα ασταθή σημεία ακίνητα ως προς το σημείο αυτό (όπως επίσης και πολλά άλλα κομβικά σημεία κινούμενα ως προς αυτό). Μια πλήρης μελέτη των κομβικών σημείων και των σημείων X δεν έχει γίνει.

Κάθε κυματοσυνάρτηση με διάσπαρτα κομβικά σημεία έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Πχ. εις την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = aY_{3,2} + bY_{3,1} + cY_{4,1} \quad (2.36)$$

η τοπολογία των κομβικών σημείων, των σημείων X (Σχ. Β'.11) και των ασυμπτωτικών καμπύλων είναι πολύ διαφορετική από αυτήν του Σχ. Β'.10.

Στην περίπτωση αυτή, πλησίον του κομβικού σημείου N υπάρχει ένα σημείο X , από το οποίο αρχίζει μια ασυμπτωτική καμπύλη η οποία πλησιάζει σπειροειδώς το κομβικό σημείο $(0, 0)$. Οι άλλες 3 ασυμπτωτικές καμπύλες αριστερά απομακρύνονται από το X σε μεγάλες αποστάσεις πάνω και κάτω. Σε κάποια απόσταση από το κομβικό σημείο $(0, 0)$ υπάρχει ένα δεύτερο κομβικό σημείο N' . που συνοδεύεται από



Σχήμα Β.11: Οι ροές ταχυτήτων (βέλη), δύο σημεία N και N' , δύο ασταθή σημεία X και X' και οι αμετάβλητες καμπύλες τους στον χρόνο $t = 0.1$, στην περίπτωση των διάσπαρτων κομβικών σημείων της κυματοσυνάρτησης (2.36).

ένα δεύτερο σημείο X' , ακίνητο ως προς το δεύτερο κομβικό σημείο. Το X' έχει και αυτό 4 ασυμπτωτικές καμπύλες, μια από τις οποίες περιβάλλει το δεύτερο κομβικό σημείο. Σημειώνουμε ότι η τοπολογία των Σχ. Β.10 και Σχ. Β.11 αφορά την περιοχή ενός συγκεκριμένου ζεύγους κομβικών σημείων. Ανάλογα σχήματα αφορούν άλλους κόμβους του ίδιου συστήματος. Πάντως κάθε κυματοσυνάρτηση Ψ έχει ένα σύστημα κομβικών σημείων και σημείων X .

Εις τον χώρο (x, y, Q) παρατηρούμε ένα πλήθος από προεξοχές (Σχ. Β.9) και πλησίον των κορυφών τους υπάρχουν διάφορα σημεία X . Οι σπειροειδείς ασυμπτωτικές καμπύλες έχουν ανεβοκατεβάσματα όπως εις την περίπτωση του ενός κομβικού σημείου (Σχ. Β.5a), δηλαδή έχουν μια τετραπλή ακολουθία ως προς Q με δευτερεύοντα ελαχίστα, μέγιστα, ελάχιστα μέγιστα και η ακολουθία επαναλαμβάνεται επ' άπειρον και φθάνει εις το κομβικό σημείο σε άπειρο χρόνο s . Επομένως σε κάθε περίπτωση ιδιοσυναρτήσεως υπάρχει μια ιδιάζουσα, και πολύπλοκη εν γένει, τοπολογία κομβικών σημείων, σημείων X και ασυμπτωτικών καμπύλων.

Β.7 Συμπεράσματα

Το ολικό δυναμικό σε ένα κβαντικό σύστημα αποτελείται από το κβαντικό δυναμικό V και από το κβαντικό δυναμικό Q . Το κβαντικό δυναμικό είναι πολύ σημαντικό πλησίον των κομβικών σημείων όπου η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται, ενώ ακριβώς εις τα κομβικά σημεία η τιμή του Q είναι αρνητικό άπειρο.

Το κυριότερο νέο στοιχείο της παρούσης εργασίας είναι ότι πλησίον κάθε κομβικού σημείου N το κβαντικό δυναμικό έχει ένα θετικό μέγιστο. Πολύ κοντά σε κάθε μέγιστο υπάρχει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας X με 2 αντίθετες ασταθείς ιδιοδιευθύνσεις και 2 αντίθετες ευσταθείς ιδιοδιευθύνσεις. Οι τροχιές που πλησιάζουν το σημείο X (πλησίον των ευσταθών ιδιοδιευθύνσεων) εκτρέπονται προς τη μία ή την άλλη ασταθή ιδιοδιεύθυνση και κατά τον τρόπο αυτόν δημιουργούν το χάος.

Μελετήσαμε λεπτομερώς 3 περιπτώσεις κομβικών σημείων, και των αντίστοιχων ασταθών σημείων X με τις ασυμπτωτικές τους καμπύλες: α) Μια περίπτωση με ένα μόνο κομβικό σημείο, β) Μια περίπτωση με άπειρα κομβικά σημεία κατά μήκος μιας ευθείας, και γ) Μια περίπτωση με έναν αριθμό διάσπαρτων κομβικών σημείων. Εις όλες τις περιπτώσεις κοντά σε κάθε κομβικό σημείο υπάρχει τουλάχιστον ένα ασταθές σημείο X . Τα μέγιστα του δυναμικού είναι τόσο μεγαλύτερα όσο τα σημεία X βρίσκονται πλησιέστερα προς τα κομβικά σημεία.

Όσον αφορά τις τροχιές των κβαντικών σωματίων, αυτές είναι είτε α) οργανωμένες που δεν πλησιάζουν τα κομβικά σημεία είτε β) χαοτικές τροχιές που πλησιάζουν τα σημεία X κοντά στα κομβικά σημεία. Ορισμένες εξ αυτών ακολουθούν για ένα χρονικό διάστημα την κίνηση ενός κόμβου διαγράφοντας σπειροειδείς τροχιές γύρω απ' αυτόν, αλλά αργότερα απομακρύνονται.

Αναφορές

Bohm D., 1952a, Phys. Rev., 85, 166.

Bohm D., 1952b, Phys. Rev., 85, 180.

Contopoulos G., Efthymiopoulos C. and Harsoula M., 2008, Nonlin. Phen Comp. Sys., 11 (2), 107.

Dennis G., de Gosson M.A. and Hiley B.J., 2015, Phys. Lett. A, 379 (18-19), 1224.

Efthymiopoulos C., Kalapotharakos C. and Contopoulos G., 2007, J. Phys. A, 40 (43), 12945.

Efthymiopoulos C., Kalapotharakos C. and Contopoulos G., 2009, Phys. Rev. E, 79, 036203.

Goldstein S. and Struyve W., 2014, J. Phys.A, 48 (2), 025303.

Hojman S.A., Asenjo F.A., Moya-Cessa H.M. and Soto-Eguibar F., 2021, Optik, 232, 166341.

Holland P.R., 1995, The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics, Cambridge University Press.

Kohout M., 2002, Int. J. Quant. Chem., 87 (1), 12.

Lopreore C.L. and Wyatt R.E., 1999, Phys. Rev. Lett., 82 (26), 5190.

Riggs P. J., 2008, Erkenntnis, 68 (1), 21.

Sanz A., 2019, Front. Phys., 14 (1), 1.

Tzemos A. and Contopoulos G., 2021, Phys. Scr., 96 (6), 065209.

Tzemos A.C. and Contopoulos G., 2020, Phys. Rev. E, 102 (4), 042205.

Tzemos A.C., Contopoulos G. and Efthymiopoulos C., 2019, Phys. Scr., 94, 105218.

Κοντόπουλος G., Τζέμος Α. και Ζουλούμη Κ., 2019, Νεότερες Εξελίξεις στην Αστρονομία 2019, 1.

Γ' Η τροχιακή δομή των γαλαξιακών ράβδων: Σημερινή γνώση και ανοιχτά ερωτήματα

Πάνος Πάτσης

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια σύντομη επισκόπηση των γνώσεων που είναι σήμερα ευρύτερα αποδεκτές για τις τροχιές των αστερών στις ράβδους των γαλαξιών και απαριθμούνται μερικά ανοιχτά θέματα στα οποία εστιάζεται, ή πρέπει να εστιασθεί, η έρευνα στον τομέα αυτό.

Γ'.1 Εισαγωγή - Ιστορική αναδρομή

“The general appearance is that of the Greek letter Φ , and I have termed such objects Φ -type spirals, for lack of a better name.”

H.D. Curtis, Publications of Lick Observatory, 13, 12, 1918

Ράβδοι παρατηρούνται σε ένα μεγάλο ποσοστό δισκοειδών γαλαξιών στο κοιντό σύμπαν (βλ. π.χ. Masters, Nichol and Hoyle, 2011), ενώ είναι ήδη παρούσες στις εικόνες βαθέων πεδίων του τηλεσκοπίου Hubble (Sheth, Regan, Scoville et al., 2003). Σημαντική είναι η παρατήρηση ότι το ποσοστό τους αυξάνεται σε παρατηρήσεις στο εγγύς υπέρυθρο (Grosbøl, Patsis and Pompei, 2004), διότι σε αυτά τα μήκη κύματος αποτυπώνεται καλύτερα η δράση δυναμικών μηχανισμών στους αστερές του πληθυσμού II (PopII). Ως εκ τούτου τα πεδία δυνάμεων στα οποία θα βασιστούν μοντέλα για την κατανόηση της μορφολογίας τους πρέπει να εκτιμηθούν από εικόνες τους, ιδανικά στα 2.1μ (Grosbøl, 2009).

Οι ράβδοι είναι ένα σύννητες χαρακτηριστικό που εμφανίζεται σε προσομοιώσεις N-σωμάτων και αυτό έγινε σαφές από τις πρώτες προσπάθειες κατασκευής τέτοιων μοντέλων (βλ. π.χ. Hockney and Hohl, 1969). Αυτό ερχόταν σε συμφωνία με το κριτήριο του Toomre (1964), που προβλέπει ότι ένας λεπτός αστρικός δίσκος επιφανειακής πυκνότητας Σ είναι ασταθής όταν

$$Q = \frac{\sigma_R \kappa}{3.36 G \Sigma} < 1,$$

όπου σ_R είναι η ακτινική διασπορά ταχυτήτων των αστερών, κ η επικυκλική τους συχνότητα και Q η “παράμετρος του Toomre”.

Λόγω του γεγονότος ότι οι ράβδοι, αντίθετα με τις σπείρες, διατηρούνται στις προσομοιώσεις για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα του χρόνου προσομοίωσης και οι δίσκοι, εύλογα, μπορούν να θεωρηθούν 2-διάστατα αντικείμενα, η θεωρητική μελέτη των τροχιών τους ακολούθησε τον φορμαλισμό 2-διάστατων, αυτόνομων Χαμιλτονιανών συστημάτων (Contopoulos and Papayannopoulos, 1980; Contopoulos and Grosbøl, 1989; Contopoulos, 2002, section 3.1.4, για λεπτομέρειες). Τα αναλυτικά μοντέλα δυναμικών που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτές τις μελέτες ήταν της γενικής μορφής, σε πολικές συντεταγμένες, $\Phi(r, \theta) = \Phi_0(r) + A(r) \cos \theta$, όπου το $\Phi_0(r)$ αναφέρεται σε ένα

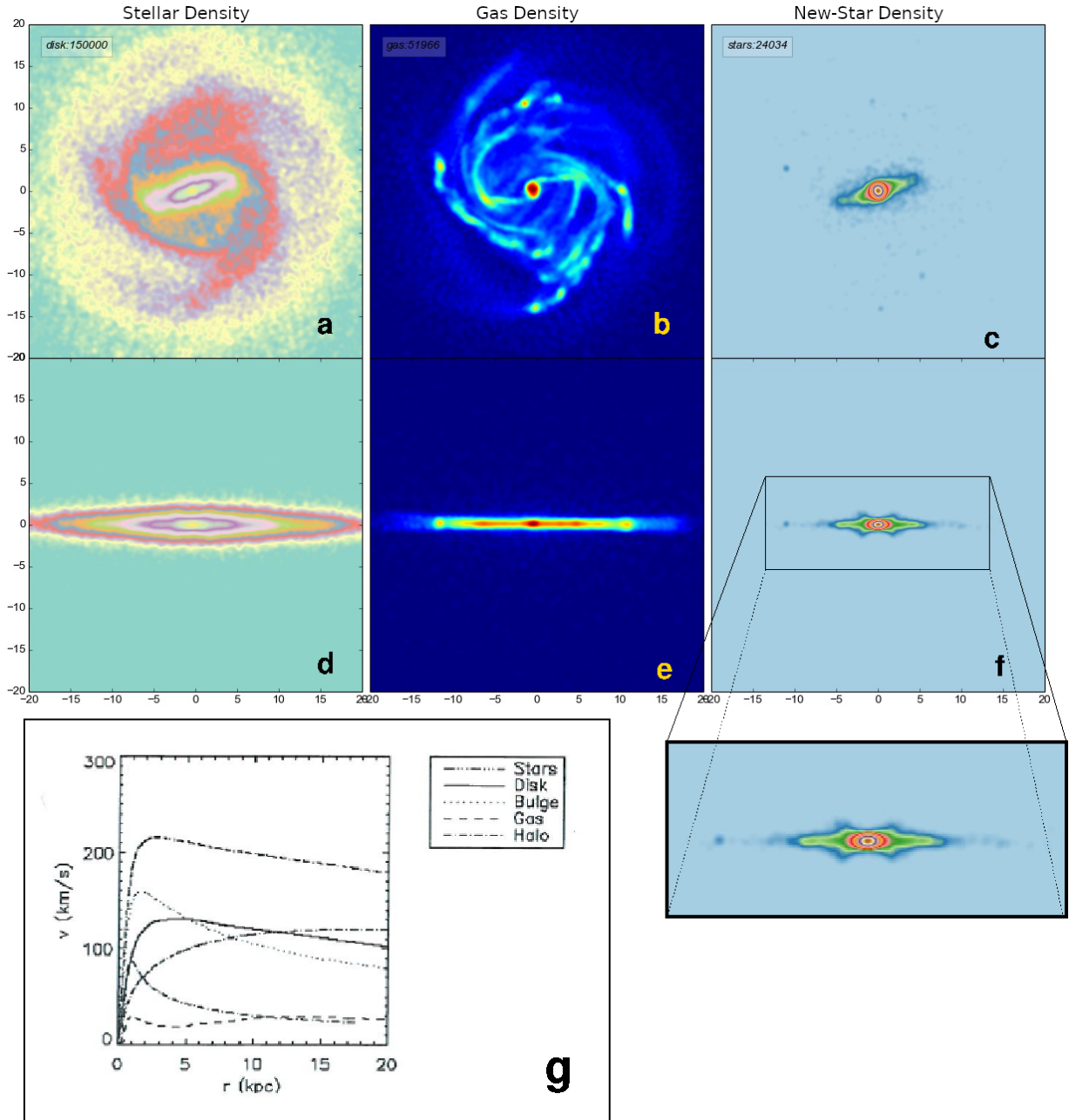
αξισυμμετρικό μέρος και το $A(r)$ είναι μια συνάρτηση που περιγράφει το πλάτος της διαταραχής. Το βασικό συμπέρασμα των μελετών που προαναφέραμε, και άλλων που ακολούθησαν, είναι ότι η ράβδος υποστηρίζεται από τροχιές παγιδευμένες γύρω από τις ευσταθείς, ελλειπτικές τροχιές της οικογένειας x_1 , ο μεγάλος ημιάξονας των οποίων είναι κατά μήκος του μεγάλου ημιάξονα της ράβδου. Μια δεύτερη οικογένεια ευσταθών περιοδικών τροχιών, επίσης ελλειπτικών, με τον μεγάλο ημιάξονά τους κατά μήκος του μικρού ημιάξονα της ράβδου, είναι σημαντική για τη δυναμική του συστήματος στην κεντρική περιοχή και ονομάζεται x_2 . Τέλος, τροχιές τόσο της x_1 στην περιοχή του συντονισμού 4:1, όσο και μιας οικογένειας που εισέρχεται στο σύστημα στον συντονισμό αυτό (Contopoulos, 1988), προσφέρουν τη δυνατότητα του σχηματισμού ράβδων σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Αυτή η τροχιακή συμπεριφορά για τις γαλαξιακές ράβδους είναι μέχρι σήμερα η γενικά αποδεκτή από την κοινότητα των ερευνητών που εργάζονται στο πεδίο αυτό. Ένα άλλο βασικό συμπέρασμα είναι το γεγονός ότι οι ράβδοι δεν μπορούν να εκτείνονται πέρα από την περιοχή του συντονισμού της συμπεριστροφής (Contopoulos, 1980). Ευρύτερα είναι αποδεκτό ότι $R_c = 1.2 \pm 0.2 R_b$, όπου R_c η ακτίνα της συμπεριστροφής και R_b το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της ράβδου (Athanassoula, 1992a).

Όταν έγινε τεχνικά εφικτό να πραγματοποιηθούν 3-διάστατες προσομοιώσεις N-σωμάτων, έγινε φανερό ότι οι ράβδοι στα μοντέλα δεν ήταν 2-διάστατα αντικείμενα, αλλά η κεντρική τους περιοχή εκτείνονταν σε ύψη ακόμη και μεγαλύτερα του 1 kpc. Η πρώτη εργασία που το επεσήμανε ήταν των Combes and Sanders (1981), στην οποία η κεντρική περιοχή των ράβδων που φτάνει μέχρι τα μέσα του μεγάλου ημιάξονα, όταν παρατηρείται από το πλάι εμφανίζει μια μορφολογία “φιστικιού”. Αυτό επιβεβαιώθηκε από πολλές ερευνητικές ομάδες, με τη χρήση πολλών διαφορετικών κωδίκων. Μια αναλυτική επισκόπηση του θέματος παρουσιάζεται στην εργασία της Athanassoula (2016). Στο Σχ. Γ'.1 δίνουμε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας προσομοίωσης (Patsis and Naab 2022 - σε προετοιμασία).

Συγκεκριμένα, στο Σχ. Γ'.1a βλέπουμε την προβολή στο ισημερινό επίπεδο της αστρικής πυκνότητας ενός μοντέλου με τον κώδικα GADGET-3¹ (Springel, 2005). Οι πυκνότητες πέφτουν από το κέντρο προς τα έξω και τα ψευδοχρώματα έχουν χρησιμοποιηθεί για να τονισθούν οι ισόπυκνες του μοντέλου. Στο Σχ. Γ'.1b δίδεται η πυκνότητα του αερίου πάνω στο ισημερινό επίπεδο. Ο κώδικας επιτρέπει την προσομοίωση του θανάτου και της γέννησης νέων αστερών. Έτσι, στο Σχ. Γ'.1c έχουμε απομονώσει τους νέους αστέρες που έχουν γεννηθεί από την αρχή της προσομοίωσης μέχρι τον χρόνο που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο που παρουσιάζουμε, δηλαδή μετά από $t = 3.6 \text{ Gyr}$. Οι αστέρες αυτοί σχηματίζουν μια κλασική ράβδο συνηθισμένης μορφολογίας. Στην κάτω σειρά, βλέπουμε τα αντίστοιχα σχήματα από μια οπτική ακτίνα κάθετη στον μεγάλο ημιάξονα της ράβδου. Εστιάζουμε στο Σχ. Γ'.1f, όπου οι νέοι αστέρες σχηματίζουν το “peanut”, όπως φαίνεται καλύτερα και στη μεγέθυνση. Στο Σχ. Γ'.1g, δίνεται η καμπύλη περιστροφής του μοντέλου συνολικά και των επιμέρους όρων του για να δείξουμε ότι προσομοιάζουν μια χαρακτηριστική, συνήθη κατανομή ύλης σε ένα ραβδωτό σπειροειδή γαλαξία (βλ. π.χ. Begeman, 1987).

¹<https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>



Σχήμα Γ.1: Ένα μοντέλο N -σωμάτων με τον κώδικα *GADGET-3*, στο οποίο αναπτύσσεται μια περιστρεφόμενη ράβδος. Στα (a), (b) και (c) βλέπουμε την προβολή επί του ισημερινού επιπέδου του συνολικού αστρικού πληθυσμού, του αερίου και των νέων αστέρων αντίστοιχα, ενώ στα (d), (e) και (f) δίνουμε τις ίδιες εικόνες από μια ακτίνα παρατήρησης κάθετη στον μεγάλο άξονα της ράβδου. Το κεντρικό “φιστικοειδές” εξόγκωμα δίνεται και σε μεγέθυνση (κάτω δεξιά). Είναι φανερό ότι η δομή αυτή χαρακτηρίζει τους νέους αστέρες του δίσκου. Η συνολική καμπύλη περιστροφής μαζί με αυτές των επιμέρους όρων δίνεται στο (g). Το στιγμιότυπο καταγράφει την εξέλιξη του μοντέλου 3.6 Gyr μετά την έναρξη της προσομοίωσης.

Η ύπαρξη των κιβωτιόσχημων σχηματισμών στο κέντρο των ράβδων στα μοντέλα N -σωμάτων (“peanuts”) ταυτίστηκε αμέσως με τη μορφολογία δισκοειδών γαλαξιών που παρατηρούνται από το πλάι, και εμφανίζουν μια ανάλογη δομή. Εύλογα υποστηρίχθηκε ότι πρόκειται για γαλαξιακές ράβδους στις οποίες ξεχωρίζει το κεντρικό τμήμα που εκτείνεται εκτός του ισημερινού επιπέδου του δίσκου, λόγω της μεγάλης

γωνίας κλίσης ως προς το επίπεδο του ουρανού. Το συμπέρασμα αυτό ενισχύθηκε από κινηματικές μελέτες (Bureau and Freeman, 1999). Παρόλο που το εύρος των γωνιών κλίσης των δίσκων ως προς το επίπεδο του ουρανού που μας επιτρέπει την ταυτόχρονη παρατήρηση του ογκώδους εσωτερικού και του λεπτού εξωτερικού μέρους της ράβδου είναι μικρό, έχουν καταγραφεί και τέτοιες εικόνες γαλαξιών με κατάλληλες παρατηρήσεις μεγάλης έκθεσης (Patsis, Xilouris, Alikakos et al., 2021). Έτσι αποδεικνύεται πέρα πάσης αμφιβολίας ότι οι ράβδοι των γαλαξιών αποτελούνται από δύο μέρη.

Τροχιές που υποστηρίζουν το ογκώδες, εσωτερικό μέρος της ράβδου και διαμορφώνουν τη μορφολογία του “φιστικιού” προτάθηκαν από τον (Pfenniger, 1984) και αργότερα, πιο αναλυτικά, από τους (Patsis, Skokos and Athanassoula, 2002). Σύμφωνα με αυτές τις μελέτες, οι τροχιές αυτές είναι οι κάθετες διακλαδώσεις της $x1$ στον κάθετο συντονισμό Lindblad, δηλ. τροχιές που εκτελούν δύο κάθετες ταλαντώσεις συμπληρώνοντας μια περιστροφή γύρω από το κέντρο του γαλαξία.

Γ.2 Ανοιχτά ερωτήματα

Παραθέτουμε εδώ μερικά από τα ανοιχτά ακόμη θέματα που αφορούν τις τροχιές και γενικότερα τη δυναμική των γαλαξιακών ράβδων :

1. Το σχήμα των ράβδων.

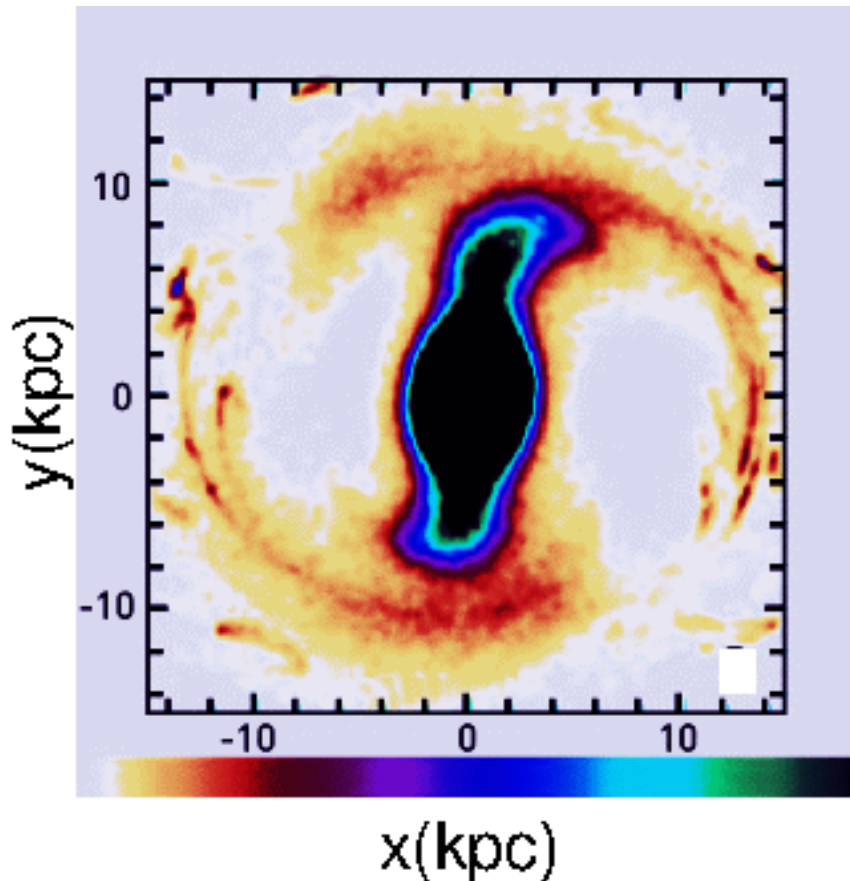
Είναι ευρύτερα αποδεκτό ότι οι ράβδοι έχουν ένα ελλειψοειδές σχήμα. Παρόλα αυτά και παρά την ύπαρξη του κεντρικού ογκώδους μέρους των ράβδων, δηλ. του “pearl”, μελέτες που αφορούν την ανάλυση της επιφανειακής λαμπρότητας των δίσκων σε επιμέρους όρους, προτείνουν σε πολλές περιπτώσεις την ύπαρξη σημαντικών κλασσικών σφαιροειδών του πυρήνα (bulges). Αυτά συνεισφέρουν σε έναν αξιsymμετρικό όρο, μαζί με τον δίσκο και την άλω. Επ’ αυτού του αξιsymμετρικού όρου η ράβδος μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή. Μπορούμε να αναλύσουμε τις εικόνες των γαλαξιών και να απομονώσουμε το σχήμα της διαταραχής. Σε πολλές περιπτώσεις αυτές οι διαταραχές έχουν σχήμα “προπέλας” και όχι ελλειπτικό. Μια τέτοια εικόνα έχει παρουσιαστεί για τον γαλαξία NGC 1300, από τους Patsis, Kalapotharakos and Grosbøl (2010) (σχήμα 1 σε αυτή την εργασία). Το θέμα το οποίο τίθεται σε μια τέτοια περίπτωση, είναι το σχήμα των τροχιών (ή των προβολών τους επί του γαλαξιακού επιπέδου) που υποστηρίζουν τη ράβδο. Σημειώνουμε πως οι Kaufmann and Patsis (2005) έχουν παρουσιάσει μοντέλα ράβδων που η βασική οικογένεια έχει σχήμα προπέλας. Αυτές είναι περιπτώσεις με ειδικούς λόγους αξόνων της ράβδου. Εδώ το πρώτο ζήτημα που χρίζει κατανόησης είναι η ανάλυση της επιφανειακής λαμπρότητας των εικόνων των ραβδωτών γαλαξιών σε αξιsymμετρικούς όρους και όρους διαταραχών. Ενδέχεται σε μερικούς τύπους ραβδωτών-σπειροειδών γαλαξιών οι τροχιές τύπου προπέλας, να παίζουν σημαντικό ρόλο.

Ένα δεύτερο, πιο άμεσο θέμα που σχετίζεται με το σχήμα των ράβδων, είναι ο υπολογισμός τροχιών σε μοντέλα τριών διαστάσεων στα οποία το δυναμικό της ράβδου έχει ήδη σχήμα φιστικιού. Οι μελέτες των οικογενειών των περιοδικών τροχιών που υποστηρίζουν τη ράβδο καθώς και η μελέτη της ευστάθειας τους έχουν γίνει μέχρι στιγμής μόνο σε ελλειψοειδή δυναμικά. Ο υπολογισμός των

τροχιών σε δυναμικά σχήματος φιστικιού θα αποτελέσει το πρώτο βήμα για την κατασκευή αυτοσυνεπών μοντέλων 3-διάστατων ράβδων.

2. Χαοτικές ράβδοι.

Στην εργασία Patsis, Kalapotharakos and Grosbøl (2010) υπολογίστηκαν τροχιές σε μοντέλα που βασίστηκαν στην εκτίμηση του δυναμικού του ραβδωτού σπειροειδή γαλαξία NGC 1300 από παρατηρήσεις στο εγγύς υπέρυθρο. Διαπιστώθηκε ότι σε ένα εύρος τιμών της ταχύτητας περιστροφής της ράβδου, το σχήμα των εξωτερικών καμπύλων μηδενικής ταχύτητας κοντά στη συμπεριστροφή του μοντέλου στα ενεργά δυναμικά, είχε το χαρακτηριστικό σχήμα μιας ράβδου με βρόχους στα άκρα (ansae type bar). Ένα τέτοιο σχήμα απαντάται σε πολλούς γαλαξίες, μεταξύ των οποίων και ο NGC 1300. Οι τροχιές στη ράβδο στο συγκεκριμένο μοντέλο ήταν εν γένει χαοτικές. Παρόλα αυτά, επειδή τα σωμάτια αναγκαστικά παραμένουν εντός του ορίου που ορίζουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, η ράβδος παίρνει ένα πολύ ρεαλιστικό σχήμα (Σχ. Γ'.2). Το ερώτημα είναι αν είναι ευρύτερα διαδεδομένο το φαινόμενο της ύπαρξης γαλαξιακών ράβδων που η μορφολογία τους καθορίζεται από το σχήμα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και όχι από την παγίδευση ημιπεριοδικών τροχιών γύρω από ευσταθείς x_1 .



Σχήμα Γ'.2: Το σχήμα μιας ράβδου σε ένα δυναμικό για τον γαλαξία NGC 1300 καθορίζεται από το σχήμα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας κοντά στη συμπεριστροφή (βλ. Patsis, Kalapotharakos and Grosbøl, 2010).

3. Το πλάτος της διαταραχής.

Η μορφολογία των τροχιών της ράβδου εξαρτάται από το πλάτος της διαταραχής και αυτό με τη σειρά τους επηρεάζει τη μορφολογία του αερίου σε μοντέλα απόκρισης (Athanassoula, 1992b). Σειρά μελετών τόσο της τροχιακής δυναμικής όσο και της απόκρισης του αερίου σε δυναμικά που έχουν εκτιμηθεί από εικόνες γαλαξιών στο εγγύς υπέρυθρο (Patsis, Athanassoula and Quillen, 1997; Patsis, Kaufmann, Gottesman et al., 2009; Tsigaridi and Patsis, 2013; Patsis and Tsigaridi, 2017, και Pastras et al. 2022 - υπό προετοιμασία), θέτουν δύο ζητήματα που πρέπει να ερευνηθούν στο εγγύς μέλλον. Κατ' αρχάς η λεπτομερής συμφωνία των μορφολογικών χαρακτηριστικών στις αποκρίσεις του αερίου με αυτά σε εικόνες μεγάλης έκθεσης γαλαξιών στο οπτικό μέρος του φάσματος μπορεί να προσδιορίσει το πλάτος της διαταραχής της ράβδου, καθώς και τη σύσταση των αστρικών πληθυσμών που απαρτίζουν τη ράβδο. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του προσδιορισμού του κατάλληλου λόγου μάζας/λαμπρότητας για τον οποίο επιτυγχάνεται η καλύτερη συμφωνία μεταξύ των μορφολογικών χαρακτηριστικών μοντέλου και γαλαξία. Ανάλογες έρευνες μπορούν να γίνουν για τον προσδιορισμό της κατανομής της Σκοτεινής Ύλης στους γαλαξίες (Fragkoudi, Athanassoula and Bosma, 2017).

Επίσης, η μελέτη της θέσης των σπειρών που ακολουθούν το τέλος των ράβδων στα μοντέλα για πραγματικούς γαλαξίες, θα καθορίσει κατά πόσο αυτές οι σπείρες σχετίζονται με τις σπείρες χαοτικών τροχιών που ξεκινούν από τα ασταθή σημεία Lagrange L_1 και L_2 , ή σχετίζονται με πολλαπλότητες $n : 1$ οικογενειών εντός της συμπεριστροφής (Tsigaridi and Patsis, 2013, και Pastras et al. 2022 - υπό προετοιμασία).

4. Τα καλύμματα των ράβδων.

Η διαπίστωση της ύπαρξης “καλυμμάτων” της ράβδου που υποστηρίζεται από την οικογένεια $x1$ (bar envelopes), τα οποία απαρτίζονται από χαοτικές τροχιές (Patsis, Athanassoula and Quillen, 1997, και Pastras et al. 2022 - υπό προετοιμασία), θέτει το ερώτημα κατά πόσο αυτά σχετίζονται με τις “δεύτερες”, μεγαλύτερες σε έκταση ράβδους που έχει παρατηρηθεί να συνυπάρχουν μαζί με τις κυρίως ράβδους, τόσο σε πολλούς γαλαξίες στο κοντινό Σύμπαν, όσο και στη ράβδο του δικού μας Γαλαξία.

5. Το τροχιακό περιεχόμενο των “φιστικιών”.

Τέλος, ανοιχτό παραμένει το ζήτημα του προσδιορισμού των τροχιών που υποστηρίζουν το “peanut” στο κεντρικό μέρος των ράβδων. Ο ρόλος τροχιών, εκτός των διακλαδιζόμενων από την $x1$ στον κάθετο συντονισμό 2:1, που έχει προταθεί για την ερμηνεία τους (βλ. π.χ. Portail, Wegg and Gerhard, 2015) και που έχουν ταυτοποιηθεί ως διακλαδώσεις ανώτερης τάξης της $x1$ (Patsis and Athanassoula, 2019), πρέπει να αξιολογηθεί.

Συμπερασματικά, γίνεται φανερό ότι τα ανοιχτά θέματα σχετικά με τις τροχιές στις ράβδους των γαλαξιών, μπορούν να δώσουν σημαντικά στοιχεία για τη δυναμική των συστημάτων αυτών, κυρίως ως συνάρτηση των επιμέρους γαλαξιακών τύπων, όσο και για γενικότερα θέματα, όπως ο καθορισμός των αστρικών πληθυσμών στους

δίσκους, η κατανομή της Σκοτεινής Ύλης στους δισκοειδείς γαλαξίες και η ροή του αερίου προς τα κέντρα των γαλαξιών.

Αναφορές

- Athanassoula E., 1992a, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 259, 328.
- Athanassoula E., 1992b, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 259, 345.
- Athanassoula E., 2016, in E. Laurikainen, R. Peletier and D. Gadotti, eds., *Galactic Bulges*, volume 418 of *Astrophysics and Space Science Library*, 391.
- Begeman K.K.G., 1987, *HI rotation curves of spiral galaxies*, PhD Thesis, Univ. Gronigen, Netherlands.
- Bureau M. and Freeman K.C., 1999, *Astron. J.*, 118 (1), 126.
- Combes F. and Sanders R.H., 1981, *Astron. Astrophys.*, 96, 164.
- Contopoulos G., 1980, *Astron. Astrophys.*, 81 (1-2), 198.
- Contopoulos G., 1988, *Astron. Astrophys.*, 201, 44.
- Contopoulos G., 2002, *Order and chaos in dynamical astronomy*, Springer-Verlag.
- Contopoulos G. and Grosbøl P., 1989, *Astron. Astrophys. Rev.*, 1 (3-4), 261.
- Contopoulos G. and Papayannopoulos T., 1980, *Astron. Astrophys.*, 92 (1-2), 33.
- Fragkoudi F., Athanassoula E. and Bosma A., 2017, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 466 (1), 474.
- Grosbøl P., 2009, in G. Contopoulos and P. Patsis, eds., *Chaos in Astronomy*, volume 8 of *Astrophysics and Space Science Proceedings* pp.23-32.
- Grosbøl P., Patsis P.A. and Pompei E., 2004, *Astron. Astrophys.*, 423, 849.
- Hockney R.W. and Hohl F., 1969, *Astron. J.*, 74, 1102.
- Kaufmann D.E. and Patsis P.A., 2005, *Astrophys. J.*, 624 (2), 693.
- Masters K.L., Nichol R.C. and Hoyle B.e.a., 2011, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 411 (3), 2026.
- Patsis P.A. and Athanassoula E., 2019, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 490 (2), 2740.
- Patsis P.A., Athanassoula E. and Quillen A.C., 1997, *Astrophys. J.*, 483 (2), 731.
- Patsis P.A., Kalapotharakos C. and Grosbøl P., 2010, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 408 (1), 22.
- Patsis P.A., Kaufmann D.E., Gottesman S.T. and Boonyasait V., 2009, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 394 (1), 142.

- Patsis P.A., Skokos C. and Athanassoula E., 2002, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 337 (2), 578.
- Patsis P.A. and Tsigaridi L., 2017, *Astrophys. Space Sci.*, 362 (7), 129.
- Patsis P.A., Xilouris E.M., Alikakos J. and Athanassoula E., 2021, *Astron. Astrophys.*, 647, A20.
- Pfenniger D., 1984, *Astron. Astrophys.*, 134 (2), 373.
- Portail M., Wegg C. and Gerhard O., 2015, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 450, L66.
- Sheth K., Regan M.W., Scoville N.Z. and Strubbe L.E., 2003, *Astrophys. J. Lett.*, 592 (1), L13.
- Springel V., 2005, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 364 (4), 1105.
- Toomre A., 1964, *Astrophys. J.*, 139, 1217.
- Tsigaridi L. and Patsis P.A., 2013, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 434 (4), 2922.

Δ' Κβαντική συμβολή: πραγματικότητα ή απλώς μια ψευδαίσθηση του ανιχνευτή;

Ιωάννης Κοντόπουλος

Δ'.1 Ένα οντολογικό παράδοξο και η λύση του

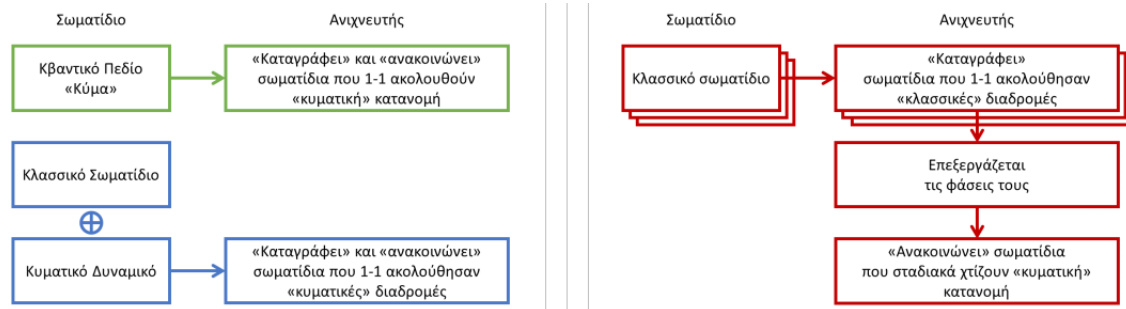
Η Κβαντομηχανική αποτελεί σήμερα την πιο επιτυχημένη θεωρία της Φυσικής. Οι προβλέψεις της έχουν επαληθευτεί με την μεγαλύτερη δυνατή πειραματική ακρίβεια, και οι εφαρμογές της αποτελούν την βάση του σύγχρονου τεχνολογικού πολιτισμού της μικροηλεκτρονικής. Μέχρι σήμερα όμως δεν έχουμε καταλήξει σε μια ικανοποιητική ερμηνεία της θεωρίας σε οντολογικό επίπεδο. Η Κβαντομηχανική προβλέπει ότι ο φυσικός κόσμος αποτελείται από «πεδία» ή «κύματα» τα οποία παρουσιάζουν το εξής παράδοξο:

Κάθε φορά που προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε ένα τέτοιο πεδίο, ανιχνεύουμε ανεξάρτητα μικροσκοπικά σωματίδια εντοπισμένα σε συγκεκριμένες θέσεις στον χώρο. Η συλλογή, όμως, πολλών τέτοιων ανεξάρτητων μεταξύ τους ανιχνεύσεων παρουσιάζει χαρακτηριστικά ωσάν το κάθε ένα σωματίδιο να εκτείνεται στον χώρο σαν κύμα.

Η συνήθης Κβαντομηχανική έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα στοιχειώδη σωματάρια είναι ταυτόχρονα και σωματίδια και κύματα. Η δυϊκότητα αυτή αποτελεί οντολογικό παράδοξο το οποίο απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί την επιστημονική κοινότητα για πάνω από 100 χρόνια. Ο διάσημος φυσικός Richard Feynman στο έργο του «The Feynman Lectures on Physics» μάλιστα δήλωσε ότι η κυματική συμπεριφορά «είναι αδύνατον, απόλυτα αδύνατον να ερμηνευτεί με κανένα κλασικό τρόπο». Μετά την παραπάνω δήλωση και με δεδομένη την τεράστια επιτυχία των εφαρμογών της Κβαντομηχανικής στο να κάνει αξιόπιστες προβλέψεις για την λειτουργία της Φύσης, οι περισσότεροι σύγχρονοι επιστήμονες υιοθέτησαν την κυνική άποψη ότι «αφού δουλεύει, δουλεύει», οπότε δεν υπάρχει λόγος να μας απασχολεί το οντολογικό παράδοξο της θεωρίας.

Το παράδοξο όμως παραμένει, και η κυνική αντιμετώπισή του δεν μας ικανοποιεί. Ευελπιστούμε ότι η λύση του παραδόξου θα προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της Φύσης. Εξάλλου, υπάρχουν φαινόμενα τα οποία μέχρι σήμερα ξεπερνούν τα όρια της Κβαντομηχανικής (πχ. «σκοτεινή ύλη» και «σκοτεινή ενέργεια»). Τα τελευταία χρόνια αναζητούμε κι εμείς έναν συμβιβασμό για το πώς μπορεί μια συλλογή πολλών ανεξάρτητων σωματιδίων να παρουσιάζει κυματικά χαρακτηριστικά χωρίς τα σωματάρια αυτά να επικοινωνούν μεταξύ τους. Αντίθετα με την παραπάνω απαισιόδοξη δήλωση του Feynman, διαπιστώσαμε ότι κατ' αρχήν υπάρχει μια θεωρητική συμβιβαστική λύση στο παραπάνω αδιέξοδο για στοιχειώδη σωματάρια που ακολουθούν ανεξάρτητες κλασικές διαδρομές αν δεχτούμε επιπλέον ότι

1. Τα σωματάρια μεταφέρουν πληροφορία για το μήκος και την ταχύτητα με την οποία διανύουν την τροχιά τους με την μορφή μιας εσωτερικής φάσης.
2. Στο σημείο ανίχνευσής τους, ο ανιχνευτής συλλέγει και επεξεργάζεται όλες αυτές τις φάσεις από πολλές διαδοχικές ανιχνεύσεις ανεξάρτητων σωματιδίων,



Σχήμα Δ'1: Σχηματική περιγραφή του οντολογικού παράδοξου της Κβαντομηχανικής και της λύσης που προτείνουμε. Πάνω αριστερά: Το σωματίδιο είναι «κύμα» αλλά μέσω της μέχρι σήμερα ακατανόητης διαδικασίας «κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης» ο ανιχνευτής «καταγράφει» σωματίδια που ένα-ένα ακολουθούν «κυματική» κατανομή (συνήθης Κβαντομηχανική). Δεξιά: Τα σωματίδια ακολουθούν κλασικές διαδρομές και «καταγράφονται» στον ανιχνευτή, ο οποίος επεξεργάζεται τις φάσεις τους και σταδιακά «ανακοινώνει» μια «κυματική» κατανομή τους (η παρούσα πρόταση). Η λύση του παραδόξου έγκειται στην διαφορά ανάμεσα στον αριθμό των σωματιδίων που «καταγράφει» και στον αριθμό των σωματιδίων που τελικά «ανακοινώνει» ο ανιχνευτής σε κάθε θέση. Κάτω αριστερά: Τα σωματίδια ένα-ένα ακολουθούν «κυματικές διαδρομές» (μηχανική Bohm).

και στη συνέχεια.

3. Ο ανιχνευτής ανακοινώνει έναν αριθμό σωματιδίων με βάση την παραπάνω επεξεργασία των φάσεων, ο οποίος ενδεχομένως να διαφέρει από τον αριθμό των σωματιδίων που συνέλεξε.

Ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται ότι, με κατάλληλη επιλογή των φάσεων, η σταδιακή επεξεργασία από έναν ειδικό ανιχνευτή της πληροφορίας που προκύπτει από την συλλογή πολλών διαδοχικών σωματιδίων θα μπορούσε κατ' αρχήν να παρουσιάζει κυματικά χαρακτηριστικά χωρίς την οντολογικά παράλογη απαίτηση τα σωματίδια να είναι ταυτόχρονα και εντοπισμένα και απλωμένα σε όλο τον χώρο. Με άλλα λόγια, η πληροφορία που απαιτείται ώστε να παρουσιάζει ένα φυσικό φαινόμενο κυματικά χαρακτηριστικά, μπορεί να μεταφέρεται σταδιακά σε έναν ειδικό ανιχνευτή μετά από πολλές διαδοχικές ανιχνεύσεις ανεξάρτητων σωματιδίων. Και εδώ έγκειται ο βασικός συμβιβασμός του μοντέλου μας: τα σωματίδια μπορεί να υπάρχουν, να συμπεριφέρονται, και να ανιχνεύονται ως κλασικά σωματίδια, όμως ενδεχομένως εμείς να παρατηρούμε κυματικά χαρακτηριστικά επειδή αυτό ανακοινώνει ο ανιχνευτής μας (βλέπε Σχ. Δ'1).

Η παραπάνω ιδέα είναι κατ' αρχήν λογική. Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε μια συγκεκριμένη υλοποίησή της, δηλαδή μια συγκεκριμένη θεωρητική μορφή των φάσεων και του ανιχνευτή που επεξεργάζεται αυτές τις φάσεις ώστε να προκύπτει η κυματική συμπεριφορά που προβλέπει η Κβαντομηχανική. Προς το παρόν, δεν έχουμε να προτείνουμε κάποια φυσική υλοποίησης της διαδικασίας αυτής. Θα θέλαμε να ξεκαθαρίσουμε ότι ο σκοπός της παρούσας εργασίας δεν είναι να αμφισβητήσει την Κβαντομηχανική. Οι προβλέψεις της μαθηματικής κυματοσυνάρτησης που αφορούν στην κατανομή των στοιχειωδών σωματιδίων στον χώρο και στον χρόνο εξακολουθούν να ισχύουν. Σκοπός της εργασίας είναι να προσφέρει μια εναλλακτική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής, η οποία να μπορεί να κάνει τις ίδιες με αυτήν προβλέψεις ως προς την κατανομή των στοιχειωδών σωματιδίων χωρίς το οντολογικό παράδοξο της δυϊκότητας σωματιδίου και κύματος.

Το τελικό συμπέρασμά μας είναι ότι η συγκεκριμένη θεωρητική διαδικασία που παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα αποτελεί μια τέτοια συμβιβαστική εναλλακτική ερμηνεία. Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι ζούμε σε έναν κόσμο όπου όλες οι μετρήσεις και οι ανιχνεύσεις σωματιδίων πραγματοποιούνται με τον τρόπο που προτείνουμε, η μαθηματική κυματοσυνάρτηση που προτείνει η Κβαντομηχανική αποτελεί εκ των υστέρων γνώση και όχι ιδιότητα του κάθε ενός σωματιδίου. Σε έναν τέτοιο κόσμο, η Φύση συμπεριφέρεται κλασικά, και η Κβαντομηχανική εικόνα αποτελεί απλώς μια ψευδαίσθηση στα μάτια των ανιχνευτών μας! Και εδώ έγκειται το κεντρικό συμπέρασμα της πρότασής μας: αν όλοι οι ανιχνευτές μας «βλέπουν» την ίδια ψευδαίσθηση, τότε, για τον μακροσκοπικό κόσμο μας, η ψευδαίσθηση ταυτίζεται με την φυσική πραγματικότητα, έστω και αν τα μικροσκοπικά σωματίδια συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που εμείς καταγράφουμε με τους ανιχνευτές μας.

Δ.2 Ένας νέος τρόπος ανίχνευσης σωματιδίων

Ο στόχος μας είναι να καταλήξουμε σε μια νέα οντολογική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής των στοιχειωδών σωματιδίων. Πριν όμως μιλήσουμε για σωματίδια με μάζα όπως τα ηλεκτρόνια, θα εφαρμόσουμε την ιδέα μας πρώτα σε φωτόνια που δεν έχουν μάζα και ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός. Θα δούμε στη συνέχεια τι είδους πληροφορία μπορούν να μεταφέρουν τα φωτόνια ώστε να είναι δυνατόν να προκύψουν φαινόμενα συμβολής (interference) σε έναν ανιχνευτή. Σημειώνουμε εδώ ότι η ηλεκτρομαγνητική θεωρία και η κυματική συμπεριφορά του φωτός είναι γνωστές από τον 19ο αιώνα, πολύ πριν δηλαδή από την ανάπτυξη της Κβαντομηχανικής. Το νέο στοιχείο που προσφέρει η Κβαντομηχανική είναι ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από σωματίδια/φωτόνια. Θα ήταν λοιπόν πολύ ενδιαφέρον αν μπορούσαμε να συμβιβάσουμε τις δύο αυτές αντιδιαμετρικές εικόνες χωρίς την χρήση της βασικής κβαντομηχανικής παραμέτρου, της σταθεράς δηλαδή $\hbar$ του Planck.

Σύμφωνα με τον κλασικό Ηλεκτρομαγνητισμό, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο κενό χαρακτηρίζεται από το ηλεκτρικό του πεδίο, την διεύθυνσή του, και την συχνότητά του $f = c/\lambda$ όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός, και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Αυτές είναι οι θεμελιώδεις ποσότητες από τις οποίες μπορεί κανείς να υπολογίσει την ροή ενέργειας Poynting και την πυκνότητα ενέργειας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η Κβαντομηχανική προσφέρει μια εναλλακτική περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού κύματος με βάση μια ακολουθία ανεξάρτητων φωτονίων. Αν θελήσουμε να συμβιβάσουμε τις δύο περιγραφές χωρίς να επικαλεστούμε αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας μεταξύ ανεξάρτητων φωτονίων, η ροή ενέργειας μπορεί να ιδωθεί ως ροή N φωτονίων ανά μονάδα χρόνου με ενέργεια ϵ και ταχύτητα c κατά την διεύθυνση του διανύσματος Poynting. Θα υποστηρίξουμε ότι μη αλληλεπιδρώντα φωτόνια δεν είναι δυνατόν να μεταφέρουν την πληροφορία που μεταφέρει το ηλεκτρικό πεδίο και η οποία είναι απαραίτητη ώστε η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία να παρουσιάσει κυματική συμπεριφορά (πχ. διάθλαση, συμβολή, κλπ.). Ο λόγος είναι ότι μια συλλογή N φωτονίων μεταφέρει N φορές την ενέργεια ϵ ενός φωτονίου, όμως το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογο προς την τετραγωνική ρίζα του N επί την τετραγωνική ρίζα του ϵ . Η γνώση της τετραγωνικής ρίζας του N είναι αδύνατη από ένα ανεξάρτητο φωτόνιο. Θα προχωρήσουμε λοιπόν με διαφορετικό τρόπο. Θα προτείνουμε έναν εναλλακτικό τρόπο «ανίχνευσης» του αριθμού των φωτονίων που

φθάνουν σε έναν ανιχνευτή.

Πρώτον, θα θεωρήσουμε ότι τα φωτόνια μεταφέρουν μια «φάση», κάτι σαν ένα εσωτερικό ρολόι. Για φωτόνια ακτινοβολίας μήκους κύματος λ προτείνουμε την φυσική έκφραση

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.1)$$

όπου l είναι το μήκος της διαδρομής τους από την πηγή τους μέχρι το σημείο καταγραφής τους στον ανιχνευτή. Δεύτερον, θα θεωρήσουμε έναν συγκεκριμένο τύπο ανιχνευτή ο οποίος συλλέγει τις φάσεις των N φωτονίων που φτάνουν σε μια συγκεκριμένη θέση x την ίδια χρονική στιγμή t σε πολλές ανεξάρτητες επαναλήψεις του ίδιου πειράματος, και σχηματίζει την έκφραση

$$\Psi(x; t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i l_j / \lambda}, \quad (4.2)$$

όπου l_j είναι τα μήκη των N ανεξάρτητων διαδρομών των N φωτονίων. Η ποσότητα αυτή προκύπτει από πολλές επαναλήψεις του πειράματος που καταλήγουν σε N ανεξάρτητες διαδοχικές ανιχνεύσεις φωτονίων στην συγκεκριμένη θέση του ανιχνευτή μας. Τέλος, ο συνολικός αριθμός των φωτονίων που «ανακοινώνει ότι ανίχνευσε» ο ανιχνευτής (και όχι όσα πραγματικά «κατέγραψε») προκύπτει από την έκφραση

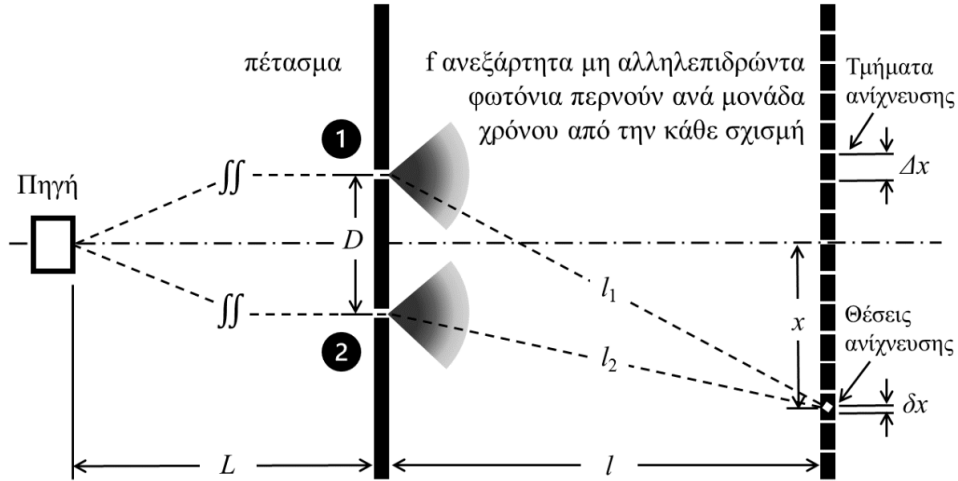
$$\bar{N}(x; t) = |\Psi(x; t)|^2 \quad (4.3)$$

Εν γένει είναι $\bar{N}(x; t) \neq N$. Δηλαδή, φωτόνια φτάνουν στον ανιχνευτή, όμως αυτός ανακοινώνει ότι ανίχνευσε. Το σημαντικό νέο στοιχείο στην ιδέα μας είναι ότι η ποσότητα Ψ (από την οποία προκύπτει και ο συνολικός αριθμός καταγεγραμμένων φωτονίων) προκύπτει εκ των υστέρων μετά από μια μεγάλη συλλογή ανιχνευμένων φωτονίων. Θα δούμε στη συνέχεια πώς με βάση τις παραπάνω παραδοχές μπορεί να προκύψουν φαινόμενα συμβολής από την συλλογή ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων μη αλληλεπιδρώντων φωτονίων.

Δ.3 Ένα πείραμα συμβολής με κλασικά φωτόνια

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα δύο σχισμών όπου ανεξάρτητα φωτόνια ενέργειας ϵ εκπέμπονται οριζόντια από μια πηγή, διασχίζουν ένα πέτασμα με δύο παράλληλες κάθετες σχισμές που απέχουν απόσταση D μεταξύ τους, και στη συνέχεια καταλήγουν σε έναν οριζόντια ανιχνευτή σε απόσταση l πίσω από το πέτασμα. Ο ανιχνευτής αποτελείται από μια σειρά pixels τα οποία συλλέγουν τα ανεξάρτητα φωτόνια και επεξεργάζονται τις φάσεις τους με βάση τις παραπάνω εκφράσεις. Στη συνέχεια, ο ανιχνευτής ανακοινώνει ανιχνεύσεις φωτονίων κάθε φορά που η ποσότητα ξεπερνάει μια ακέραιη τιμή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά.

Όσο μεγαλύτερο είναι το πάχος των θέσεων/pixels ανίχνευσης, τόσο περισσότερο «ανακατεύονται» οι φάσεις των συλλεγμένων φωτονίων, και τόσο πιο συγκεχυμένο είναι το διάγραμμα συμβολής. Όσο πιο μικρό όμως είναι το δx , τόσο λιγότερο μεν ανακατεύονται οι φάσεις και τόσο καθαρότερο είναι το διάγραμμα συμβολής που προκύπτει, όμως τόσο περισσότερα σωματίδια πρέπει να συλλεγούν στην κάθε μια

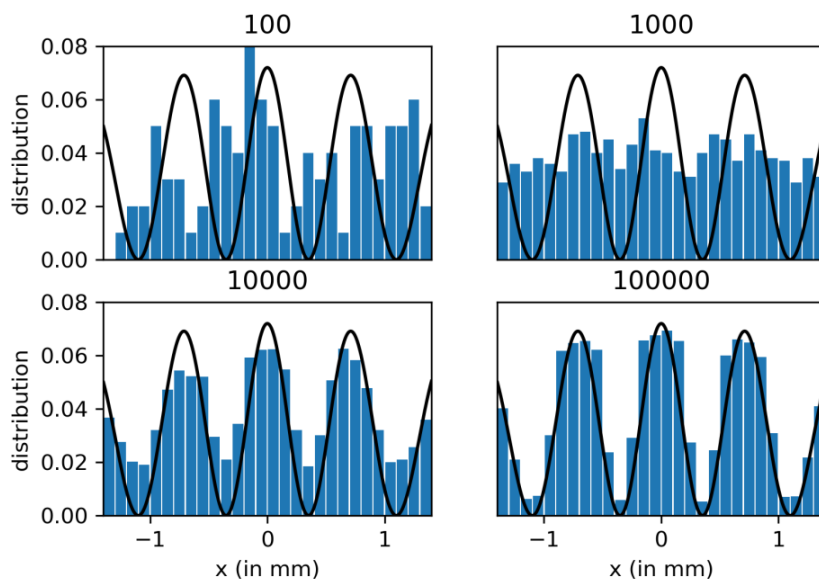


Σχήμα Δ'.2: Σχηματική περιγραφή πειράματος δύο σχισμών με f ανεξάρτητα μη αλληλεπιδρώντα φωτόνια περνούν ανά μονάδα χρόνου από την κάθε σχισμή. Οι φάσεις τους να ξεκινούν να καταγράφουν την στιγμή της εκπομπής τους από την πηγή.

θέση ανίχνευσης ώστε να προκύψει το διάγραμμα συμβολής, άρα τόσο περισσότερο καθυστερεί η εμφάνισή του. Οι ιδανικές συνθήκες για την εμφάνιση ενός διαγράμματος συμβολής που προσιδιάζει περισσότερο σε ένα πραγματικό πείραμα συλλογής ανεξάρτητων φωτονίων απαιτούν $\delta x \sim \lambda$. Δηλαδή, το μέγεθος της περιοχής ανίχνευσης πρέπει να είναι «συντονισμένο» με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας την οποία πρόκειται να ανιχνεύσει. Θα θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές διαταραχές που να επενεργούν στα φωτόνια, και ότι όλα τα φωτόνια κινούνται σε ευθείες τροχιές κατά την διαδρομή τους από την πηγή μέχρι τον τελικό ανιχνευτή.

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα αριθμητικό εικονικό πείραμα αντίστοιχο ενός πραγματικού πειράματος συλλογής ανεξάρτητων φωτονίων και καταγραφής τους σε έναν ανιχνευτή με πολλές θέσεις ανίχνευσης που πραγματοποιήθηκε το 2014 από τους Kolenderski et al. Στο πείραμα αυτό κατέγραψαν ανεξάρτητα φωτόνια καθώς έχτιζαν σταδιακά το διάγραμμα συμβολής ένα προς ένα. Θεωρούμε λοιπόν κι εμείς μια πηγή σύμφωνης ακτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda = 842\text{nm}$. Ο ανιχνευτής αποτελείται από 28 τμήματα πλάτους $\Delta x = 100\text{m}$ με κέντρο την θέση $x = 0$ σε απόσταση $l = 3\text{mm}$ μακριά από ένα πέτασμα με 2 λεπτές σχισμές σε απόσταση $D = 5\lambda$ μεταξύ τους. Διαλέξαμε την συγκεκριμένη απόσταση ανάμεσα στον ανιχνευτή και στο πέτασμα, ώστε να παρατηρήσουμε 4 κορυφές συμβολής κατανεμημένες ανάμεσα στα 28 τμήματα του ανιχνευτή, όπως και στο πραγματικό πείραμα. Επιπλέον, μας δόθηκε η πληροφορία ότι τα pixels του ανιχνευτή έχουν απόδοση 5% στην συγκεκριμένη περιοχή μηκών κύματος του πειράματος, δηλαδή ότι από τα 20 φωτόνια που φτάνουν σε κάθε θέση ανίχνευσης, μόνον 1 καταγράφεται. Στην πραγματικότητα, τα φωτόνια ανιχνεύονται σε θέσεις ανίχνευσης πλάτους $\delta x \ll \Delta x$ μέσα σε κάθε ένα από τα 28 τμήματα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μπορέσαμε να αναπαραγάγουμε τα αποτελέσματα του πραγματικού πειράματος επιλέγοντας $\delta x \sim \lambda$. Αν διαλέξουμε $\delta x \gg \lambda$, οι φάσεις των ανεξάρτητων φωτονίων που φτάνουν σε κάθε θέση ανίχνευσης/pixel αναμειγνύονται μεταξύ τους τόσο πολύ που δεν παρατηρείται συμβολή.

Θα θεωρήσουμε ότι τα φωτόνια εκπέμπονται με ρυθμό f φωτονίων ανά μονάδα



Σχήμα Δ'.3: Σταδιακή εμφάνιση του διαγράμματος συμβολής ύστερα από 100, 1000, 10000 και 100000 ανιχνεύσεις φωτονίων, όπως ακριβώς παρατηρείται και σε ένα πραγματικό πείραμα ανίχνευσης φωτονίων ένα προς ένα. Παρουσιάζουμε τις συνολικές ανιχνεύσεις στις 28 θέσεις ανίχνευσης του ανιχνευτή. Το πλάτος των pixels ανίχνευσης είναι $\delta x \sim \lambda$. Συνεχής γραμμή: η αναμενόμενη θεωρητική κατανομή φωτονίων.

χρόνου από την κάθε σχισμή και κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο οριζόντιο επίπεδο. Η κάθε θέση ανίχνευσης (το κάθε pixel) στην θέση x έχει πάχος δx (Σχ. Δ'.2), δηλαδή η κάθε θέση ανίχνευσης είναι μια πεπερασμένη περιοχή, και όχι μόνον ένα σημείο. Άρα οι συλλεγμένες φάσεις εμπεριέχουν μια μεταβλητότητα της τάξης του $\delta\phi \sim 2\pi\delta x/\lambda$.

Πραγματοποιούμε το αριθμητικό πείραμα ως εξής: Στέλνουμε φωτόνια τα οποία διέρχονται με τυχαίο τρόπο είτε από την μια είτε από την άλλη σχισμή. Στη συνέχεια ακολουθούν τυχαίες γωνίες πίσω από το πέτασμα και καταλήγουν σε μία από τις $28(\Delta x/\delta x) \geq 28$ θέσεις ανίχνευσης/pixels πλάτους δx του ανιχνευτή. Ο ανιχνευτής επεξεργάζεται τις φάσεις των φωτονίων σύμφωνα με την εξίσωση (3) σε κάθε θέση. Όταν η ποσότητα $|\Psi|^2$ φτάσει την τιμή 1 καταγράφεται το πρώτο σωματίδιο στην θέση αυτή, στη συνέχεια το δεύτερο, και ούτω καθ' εξής. Στο Σχ. Δ'.3 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του πειράματός μας ύστερα από 100, 1000, 10000 και 100000 ανιχνεύσεις σωματιδίων. Στη συνέχεια κατανέμουμε τις ανιχνεύσεις μας στα 28 τμήματα ανίχνευσης του ανιχνευτή μας και συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τα πραγματικά πειραματικά αποτελέσματα του Kolenderski et al. (2014). Διαπιστώνουμε αριθμητικά ότι, για $\delta x = 1m$, το θεωρητικό διάγραμμα κατανομής της ισχύος της ακτινοβολίας στις διάφορες θέσεις ανίχνευσης x (συνεχής γραμμή στο Σχ. Δ'.3).

$$\frac{dI}{dx} = \frac{4fl\epsilon}{\pi(x^2 + l^2)} \cos^2 \left(\frac{\pi x D}{\lambda \sqrt{x^2 + l^2}} \right) \quad (4.4)$$

χτίζεται σταδιακά με ανεξάρτητα σωματίδια με τον ίδιο ρυθμό όπως και στο πραγματικό πείραμα. Θεωρούμε αυτό το αποτέλεσμα την πρώτη επιτυχία της εναλλακτικής ερμηνείας μας. Είναι ενδιαφέρον ότι η εξίσωση (4.4) δεν περιέχει την σταθερά $\hbar$ του

Planck. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αναπαραγάγουμε ένα διάγραμμα συμβολής με κλασικά φωτόνια χωρίς την παραμικρή αναφορά στην Κβαντομηχανική!

Δ.4 Ένα πείραμα συμβολής με κλασικά σωματίδια με μάζα

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε όλα τα παραπάνω στην περίπτωση σωματιδίων με μάζα m . Στην περίπτωση αυτή προτείνουμε η φάση τους να ορίζεται ως

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (4.5)$$

λ είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος ίσο με $2\pi/v$ όπου v είναι μια σταθερά με μονάδες μήκους στο τετράγωνο δια χρόνο, και v είναι η ταχύτητα του σωματιδίου. Η εξίσωση (4.5) διαφέρει από την αντίστοιχη έκφραση για φωτόνια κατά έναν παράγοντα 2. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η διόρθωση είναι απαραίτητη ώστε τα αποτελέσματα του μοντέλου μας να μπορούν να αναπαραγάγουν λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger.

Στην περίπτωση σωματιδίων με μάζα, διαπιστώνουμε ότι αυτά δεν μπορεί να ακολουθούν κλασικές τροχιές όπως αυτές προβλέπονται από την κλασική εξίσωση διατήρησης της ενέργειάς τους ϵ . Ο λόγος είναι ότι η Κβαντομηχανική προβλέπει ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να ανιχνευτούν σωματίδια σε περιοχές του χώρου, οι οποίες δεν είναι προσπελάσιμες μέσω κλασικών τροχιών. Δύο τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας όπου ένα σωματίδιο μπορεί να βρεθεί πίσω από ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχει αρκετή ενέργεια ώστε να τον υπερπηδήσει, και το άτομο του υδρογόνου όπου η έκφραση για την κυματοσυνάρτηση προβλέπει ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει πιθανότητα να βρεθεί σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από τον πυρήνα, κάτι που δεν είναι δυνατόν αν το ηλεκτρόνιο αυτό ακολουθεί κλασική τροχιά με συγκεκριμένη ενέργεια. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση σωματιδίων με μάζα, κάτι λείπει από την κλασική θεωρία μας.

Αυτό που λείπει ενδεχομένως να είναι ότι πάνω στα σωματίδια ασκούνται στοχαστικές διαταραχές κατά την διάρκεια της διαδρομής τους, όπως προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Nelson (1966). Προς το παρόν δεν γνωρίζουμε ποια μπορεί να είναι η πηγή αυτών των διαταραχών. Θα μπορούσε να είναι μια αλληλεπίδραση με κάποιο υπόβαθρο, ή οι αλληλεπιδράσεις με τους κλασικούς μας ανιχνευτές που παρακολουθούν την κίνηση του σωματιδίου. Θα θεωρήσουμε ότι κάθε μικροσκοπικό σωματίδιο διαταράσσεται από μια στοχαστική διαδικασία Wiener με την μορφή τυχαίου βηματισμού όπου οι διαδοχικές μετατοπίσεις δw_i συμβαίνουν ανά χρονικά διαστήματα δt έτσι ώστε

$$\delta w_i = \pm \sqrt{2\nu \delta t}, \quad (4.6)$$

όπου το πρόσημο $\pm$ εναλλάσσεται με τυχαίο τρόπο σε κάθε μετατόπιση δw_i . Είναι επιπλέον προφανές ότι $\langle \delta w_i \rangle = 0$ και ότι $\delta w_i \delta w_j = 2\nu \delta t \delta_{i,j}$, όπου με $\langle \dots \rangle$ συμβολίζουμε την μέση τιμή ύστερα από πολλές επαναλήψεις της διαδικασίας Wiener. Η παράμετρος ν είναι ο συντελεστής διάχυσης της διαδικασίας Wiener. Σημειώνουμε ότι όταν διαταραχθεί η θέση του σωματιδίου κατά $\delta x_i = \delta w_i$, η ορμή του διαταράσσεται αντίστοιχα κατά $\delta p_i = m \frac{\delta w_i}{\delta t}$. Στην περίπτωση αυτή

$$\langle \delta x \delta p \rangle = 2m\nu \quad (4.7)$$

Μέχρις αυτό το σημείο, η τιμή της παραμέτρου ν ήταν τυχαία. Θα μπορούσαμε λοιπόν να συνεχίσουμε την μελέτη της διεργασίας Wiener χωρίς να καθορίσουμε την τιμή του ν . Είναι όμως προφανές ότι, αν επιλέξουμε την τιμή

$$\nu = \frac{\hbar}{2m}, \quad (4.8)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση ταυτίζεται με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Στην περίπτωση αυτή, η αρχή της απροσδιοριστίας δεν αποτελεί ιδιότητα του ίδιου του μικροσκοπικού σωματιδίου, αλλά είναι συνέπεια της στοχαστικής διεργασίας Wiener που διαταράσσει την τροχιά του.

Για να υπολογίσουμε την φάση του σωματιδίου, θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα την στοχαστική τροχιά του. Θα θεωρήσουμε ένα σωματίδιο με αρχική ταχύτητα v_0 σε χρόνο $t = 0$ στην θέση x_0 . Στο σωματίδιο δεν επενεργεί κάποιο εξωτερικό δυναμικό, μόνον η στοχαστική διεργασία Wiener. Το σωματίδιο είναι λοιπόν κατά τα άλλα «ελεύθερο». Η χρονική ολοκλήρωση θα γίνει ανά ίσα χρονικά διαστήματα $t_{i+1} - t_i = \delta t$. Οι μονάδες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $\hbar/m = 1$ και $v_0 = 1$. Στις μονάδες αυτές, το αρχικό μήκος de Broglie είναι ίσο με 2π , και $t = 2\pi$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει το σωματίδιο ένα μήκος de Broglie με ταχύτητα v_0 . Ξεκινούμε την ολοκλήρωση με

$$x_0 = x(t = 0) \quad (4.9)$$

$$x_1 = x(t = \delta t) = x_0 + v_0 \delta t + \delta w_1 \quad (4.10)$$

Σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή ολοκληρώνουμε την εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2w}{dt^2}$, από την οποία προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + w_{i+1} - w_i \quad (4.11)$$

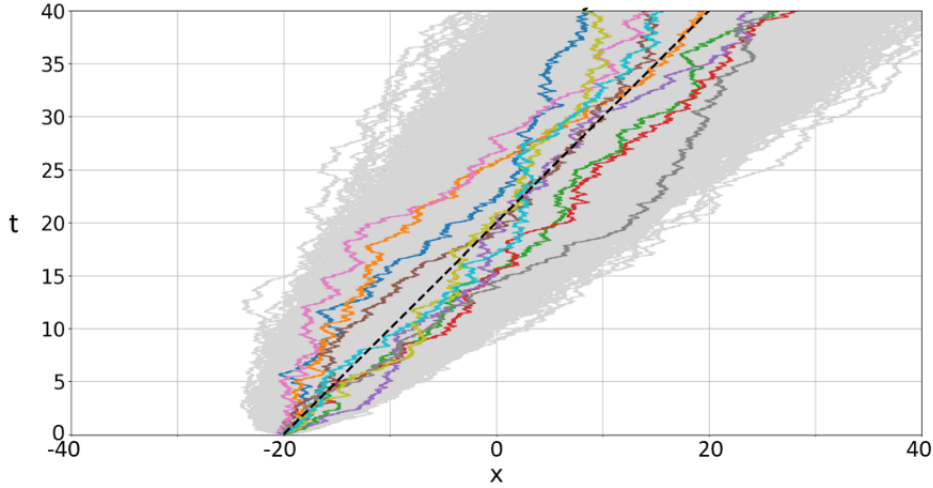
Ολοκληρώνοντας αριθμητικά την παραπάνω σχέση προκύπτει η διαδρομή του σωματιδίου, η οποία αποτελεί προφανώς τυχαίο βηματισμό. Από το Σχ. Δ'.4 είναι προφανές ότι κάθε ένα ανεξάρτητο σωματίδιο χάνει κάθε ανάμνηση τους αρχικής θέσης και ταχύτητάς του, οι οποίες όμως παραμένουν ως συλλογική ανάμνηση του συστήματος ύστερα από πολλές επαναλήψεις του ίδιου πειράματος. Η παραπάνω διαπίστωση αναδεικνύει τον ρόλο του ανιχνευτή όταν αυτός συνάγει συμπεράσματα που αφορούν μια μεγάλη συλλογή σωματιδίων και όχι το κάθε ένα σωματίδιο ανεξάρτητα.

Επιπλέον, ύστερα από έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος, η κατανομή των τροχιών γύρω από την κλασική διαδρομή $x = v_0 t$ έχει διασπορά $\sigma_x(t) \propto \sqrt{t}$, όπως ήταν αναμενόμενο για έναν τυχαίο βηματισμό. Ύστερα από αρκετές πράξεις προκύπτει ότι

$$\phi_i = \int \pi d\lambda = m v_0 \hbar \left(|x_i - x_0| - \frac{v_0 t_i}{2} \right) + \frac{i}{2} \quad (4.12)$$

Ύστερα από πολλές δοκιμές τις οποίες δεν παρουσιάζουμε στην παρούσα σύντομη αναφορά, θελήσαμε να συγκρίνουμε τις προβλέψεις του μοντέλου μας με μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{Schr}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{Schr}}{\partial x^2} \quad (4.13)$$



Σχήμα Δ'.4: «Ελεύθερα» σωματίδια που ακολουθούν τυχαίο βηματισμό ξεκινώντας από την θέση $x_0 = -20$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 1$ προς τα δεξιά. Το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης είναι $\delta t = 0.01$, δηλαδή παρουσιάζουμε 4000 βήματα για κάθε ένα σωματίδιο. Η μέση ταχύτητα $x = x_0 + v_0 t$ σημειώνεται με διακεκομμένη μαύρη γραμμή. Το γκρι υπόβαθρο σημειώνει τις τροχιές 10000 σωματιδίων. Το πλάτος της κατανομής των σωματιδίων γύρω από την μέση τιμή τους αυξάνει ως όπως είναι αναμενόμενο για έναν τυχαίο βηματισμό.

για ελεύθερα σωματίδια σε μια διάσταση που προβλέπει η Κβαντομηχανική. Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε 2 κλασικά κυματοπακέτα που σε χρόνο $t = 0$ ξεκινούν από τις θέσεις $x_0 = -20$ και $x_0 = +20$ και κινούνται με ταχύτητες $v_0 = 1$ προς τα δεξιά και τα αριστερά αντίστοιχα. Στις μονάδες $\hbar/m = v_0 = 1$ της παρούσας εργασίας, ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι η έκφραση

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\rightarrow} + \Psi_{\leftarrow}), \quad (4.14)$$

όπου

$$\Psi_{\rightarrow} = \frac{\sqrt[4]{2/\pi}}{\sqrt{1+2it}} \exp \left(\frac{-(x+20-t)^2}{1+2it} + \left(x+20 - \frac{t}{2} \right) \right) \quad (4.15)$$

$$\Psi_{\leftarrow} = \frac{\sqrt[4]{2/\pi}}{\sqrt{1+2it}} \exp \left(\frac{-(x-20-t)^2}{1+2it} + \left(x-20 - \frac{t}{2} \right) \right), \quad (4.16)$$

αποτελεί λύση με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Διαπιστώνουμε ότι το κάθε ένα από τα παραπάνω αντίθετα κινούμενα κυματοπακέτα «απλώνεται» στον χώρο με διασπορά $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+4t^2}}$ για μεγάλους χρόνους t , κάτι που είναι πολύ διαφορετικό από την διασπορά του τυχαίου βηματισμού που παρουσιάσαμε στο Σχ. Δ'.4. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι οι αρχικές συνθήκες των σωματιδίων μας πρέπει να είναι πολύ διαφορετικές από αυτές των εξισώσεων (4.9) αν υπάρχει κάποια ελπίδα να αναπαραγάγουμε τις προβλέψεις της Κβαντομηχανικής. Προκειμένου λοιπόν να δούμε μια γραμμική αύξηση του πλάτους της κατανομής των σωματιδίων μας, θα πρέπει η αρχική κατανομή τους να εμπεριέχει και αυτή ένα εύρος αρχικών ταχυτήτων.

Επαναλάβαμε, λοιπόν, το πείραμά μας με ανεξάρτητα σωματίδια που κινούνται προς τα δεξιά και τα αριστερά με αρχικές ταχύτητες που έχουν διασπορά γύρω από

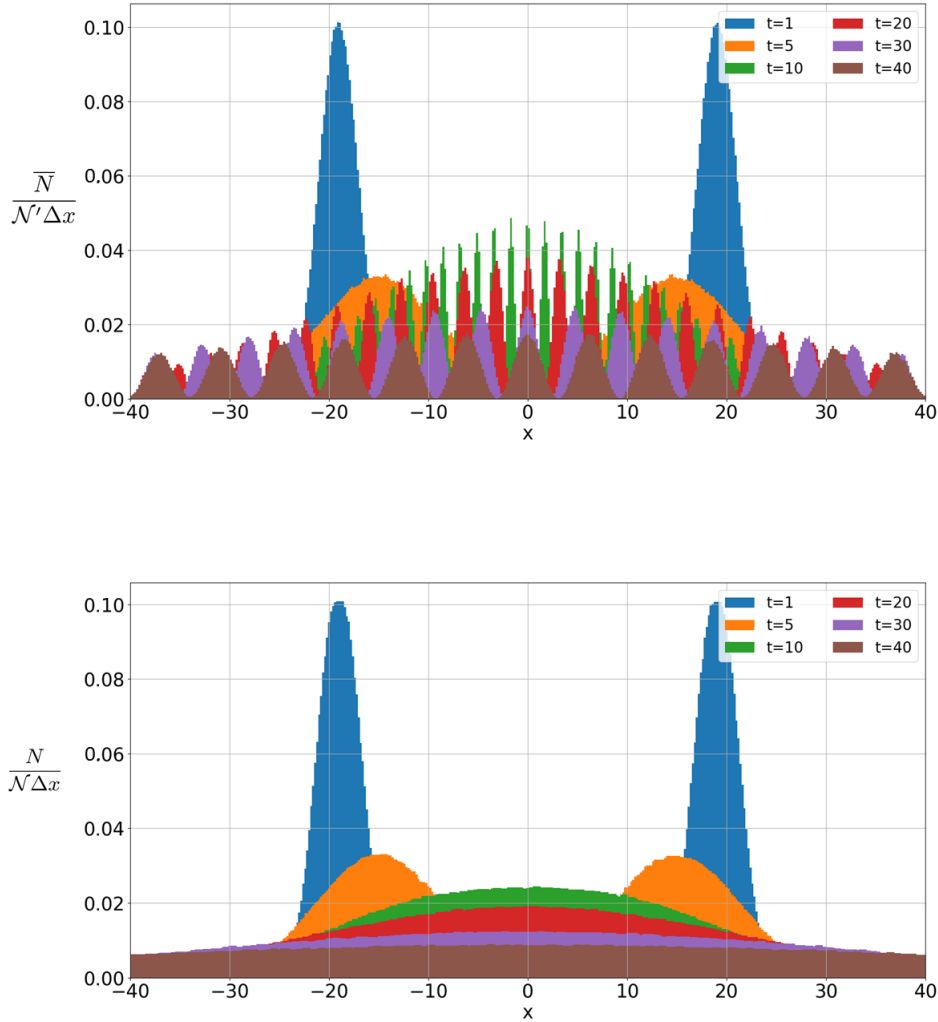
τη μέση τιμή τους $v_0 = 1$. Διαπιστώσαμε ότι η διασπορά των αρχικών ταχυτήτων είναι η πιο σημαντική παράμετρος που χαρακτηρίζει τον ρυθμό του μετέπειτα απλώματος της κατανομής των σωματιδίων. Είναι ενδιαφέρον όμως να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι το εύρος των αρχικών ταχυτήτων οδηγεί σε μια «ανάμειξη» των φάσεων των ανεξάρτητων σωματιδίων σε κάθε μια θέση ανίχνευσης πλάτους Δx . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο αριθμός των καταγεγραμμένων σωματιδίων να είναι μικρότερος από τον συνολικό αριθμό σωματιδίων $\sum N = 2000000$ του πειράματος. Πέραν του χρόνου $t = 20$, ο αριθμός των καταγεγραμμένων σωματιδίων σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 70% του συνολικού αριθμού των ανιχνευμένων σωματιδίων. Αυτή η παρατηρούμενη «απώλεια» σωματιδίων μπορεί να έχει φυσική σημασία και θα διερευνηθεί σε μελλοντική μελέτη μας.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης της εξέλιξης με τον χρόνο των δύο αντίθετα κινούμενων κατανομών ανεξάρτητων σωματιδίων συνοψίζονται στα Σχ. Δ'.5 και Δ'.6. Το πρώτο που θα θέλαμε να επισημάνουμε είναι ότι αν δεν συμπεριληφθούν οι φάσεις, τότε έχουμε δύο ανεξάρτητες κατανομές σωματιδίων που περνάει η μια μέσα από την άλλη χωρίς καμία συμβολή. Σύμφωνα με το μοντέλο μας, αυτό ακριβώς συμβαίνει. Τα σωματίδια είναι πράγματι ανεξάρτητα και η κατανομή τους είναι αυτή που παρουσιάζεται στο Σχ. Δ'.5 κάτω. Αν όμως συμπεριληφθούν και οι φάσεις τους, δηλαδή αν ο ανιχνευτής σε κάθε θέση παρατήρησης συλλέγει όχι μόνο σωματίδια αλλά και τις φάσεις τους και αποφαινεται πόσο σωματίδια θα ανακοινώσει ότι ανίχνευσε σύμφωνα με την εξίσωση (4.3), τότε η ανακοίνωση του ανιχνευτή παρουσιάζει μια πολύ ενδιαφέρουσα εικόνα συμβολής (Σχ. Δ'.5 πάνω). Στο Σχ. Δ'.6 παρουσιάζεται η κάθε μια κατανομή ανεξάρτητα για τους 6 χρόνους καταγραφής, και γίνεται σύγκριση με το αποτέλεσμα που προκύπτει αναλυτικά από την λύση της εξίσωσης του Schrödinger. Για μικρούς χρόνους δεν έχουμε καλή συμφωνία, όμως για χρόνους $t > 10$ η συμφωνία γίνεται εντυπωσιακά καλή. Το απρόσμενο αυτό αποτέλεσμα μας κάνει να ελπίζουμε ότι με κατάλληλη ρύθμιση των αρχικών συνθηκών εκπομπής των σωματιδίων (αρχικές θέσεις, ταχύτητες και φάσεις τους) η συμφωνία με το αποτέλεσμα της Κβαντομηχανικής θα είναι τέλεια.

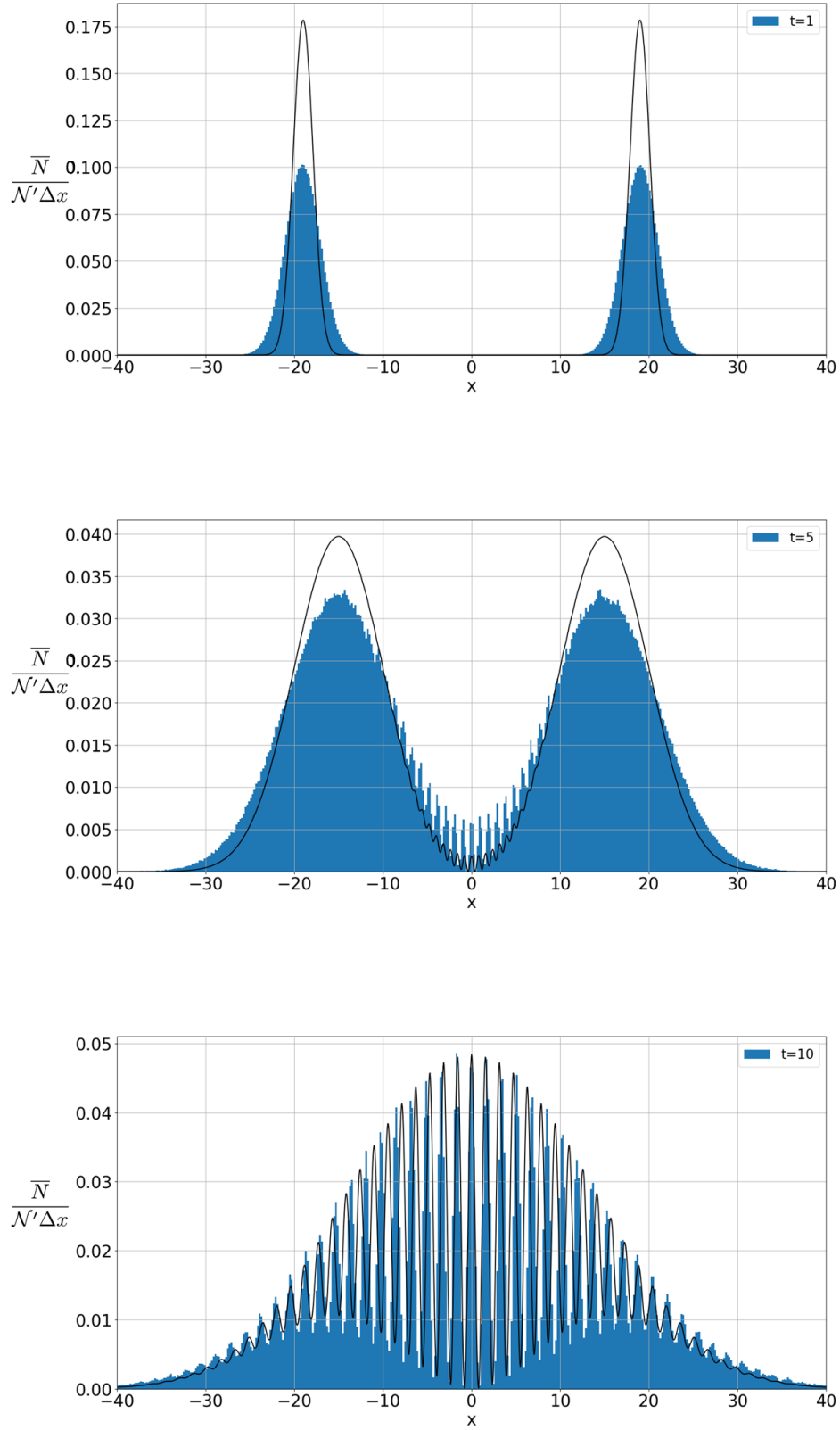
Δ'.5 Μάθαμε κάτι καινούργιο;

Όπως αναφέραμε, δεν έχουμε την παραμικρή επιθυμία να αμφισβητήσουμε τις προβλέψεις της Κβαντομηχανικής σχετικά με την συμπεριφορά και την κατανομή των στοιχειωδών σωματιδίων στις διάφορες φυσικές διεργασίες. Ο στόχος μας είναι να αναπτύξουμε ένα οντολογικά ξεκάθαρο θεωρητικό μοντέλο, το οποίο να δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με την Κβαντομηχανική ως προς τις προβλέψεις της. Αν λοιπόν αποδειχθεί ότι η Φύση πράγματι λειτουργεί με κλασικό τρόπο και ότι όλοι οι ανιχνευτές ανακοινώνουν αριθμούς ανιχνευμένων σωματιδίων με βάση την συλλογή και επεξεργασία των φάσεων που προβλέπει το μοντέλο μας, τότε, όπως αναφέραμε, η εικόνα που έχουμε για την Φύση αποτελεί μια ψευδαίσθηση. Ο αναγνώστης θα αναρωτηθεί στο σημείο αυτό αν ένα τέτοιο νέο οντολογικό μοντέλο της Φύσης μπορεί να μας μάθει κάτι καινούργιο για την Φύση το οποίο δεν προβλέπεται από την Κβαντομηχανική.

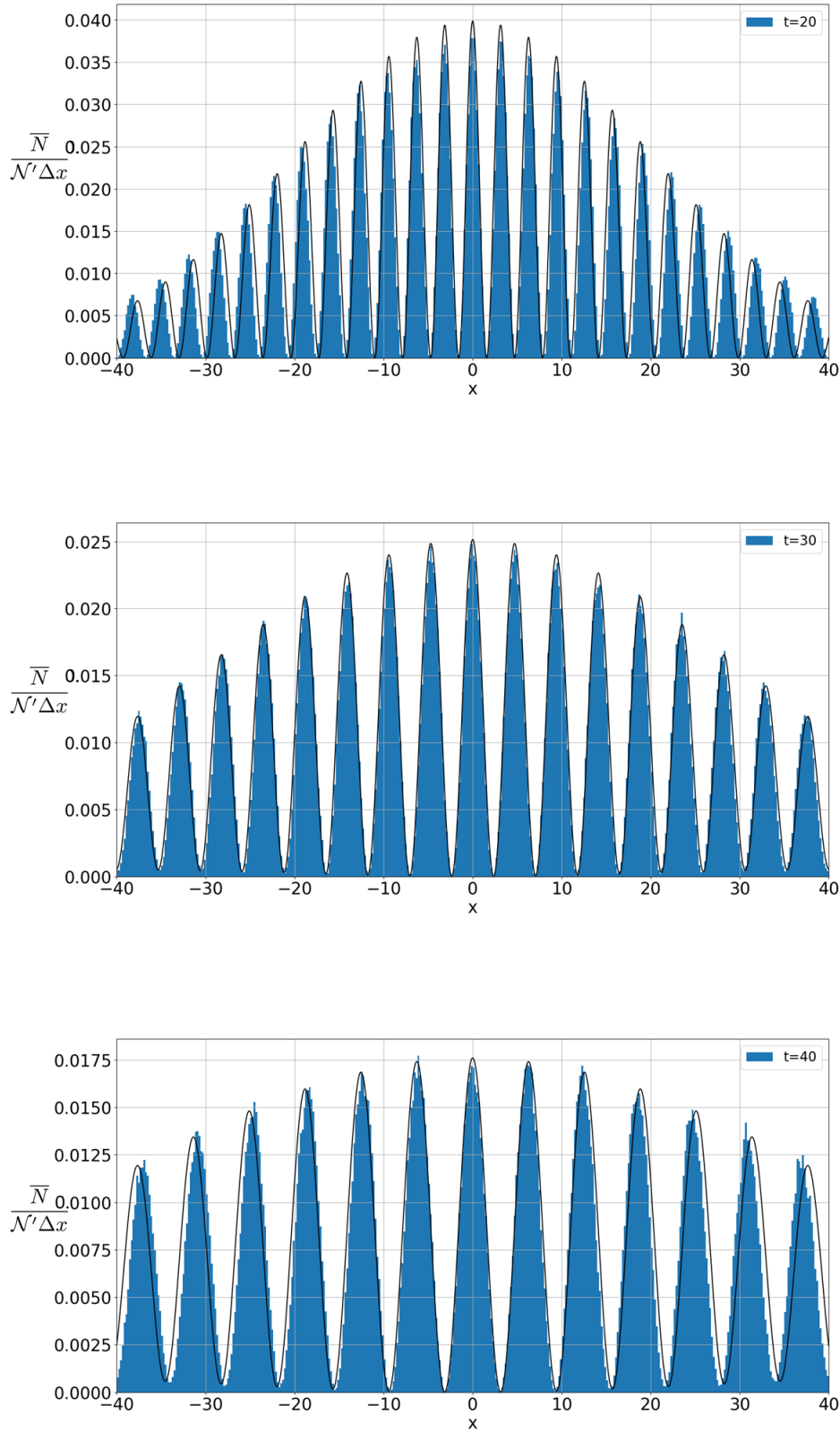
Το καινούργιο αυτό στοιχείο ενδεχομένως να είναι μια ερμηνεία της λεγόμενης «Σκοτεινής Ύλης». Όπως εξηγήσαμε παραπάνω με συγκεκριμένα θεωρητικά παρα-



Σχήμα Δ.5: Κατανομή 1000000 ανεξάρτητων σωματιδίων που κινούνται προς τα δεξιά και 1000000 ανεξάρτητων σωματιδίων που κινούνται προς τα αριστερά με ταχύτητα $v_0 = 1$ και αρχική διασπορά ταχυτήτων γύρω από τις μέσες τιμές της. Τα σωματίδια είναι ανεξάρτητα, δηλαδή εκπέμπονται ανεξάρτητα και κανένα σωματίδιο δεν αλληλεπιδρά με κανένα άλλο. Το πλάτος των κατανομών τους απλώνει ως t λόγω ακριβώς της διασποράς των αρχικών τους ταχυτήτων. Επάνω σχήμα: Η ανακοίνωση του αριθμού των ανιχνευμένων σωματιδίων γίνεται ύστερα από την επεξεργασία των φάσεων των σωματιδίων που συλλέγει ο ανιχνευτής σε κάθε θέση ανίχνευσης με βάση το μοντέλο του ανιχνευτή που προτείνουμε στην εξίσωση (4.3). Η κατανομή τους αναφέρεται στον συνολικό αριθμό σωματιδίων που ανιχνεύτηκαν. Κάτω σχήμα: Η κατανομή των σωματιδίων που καταγράφηκαν σε κάθε θέση ανίχνευσης.



Σχήμα Δ'6: Λεπτομερείς κατανομές σωματιδίων σε διάφορες χρονικές στιγμές και σύγκριση με την λύση της εξίσωσης του Schrödinger (συνεχής γραμμή).



Σχήμα Δ.7: Λεπτομερείς κατανομές σωματιδίων σε διάφορες χρονικές στιγμές και σύγκριση με την λύση της εξίσωσης του Schrödinger (συνεχής γραμμή).

δείγματα, σε κάθε μια θέση ανίχνευσης των ανιχνευτών μας καταφθάνουν σωματίδια από πολλές διαφορετικές διαδρομές με πολύ διαφορετικές φάσεις. Σε πολλές περιπτώσεις διαπιστώσαμε ότι οι διαφορετικές αυτές φάσεις αλληλο-ακυρώνονται κατά την ανακοίνωση του αριθμού των ανιχνευμένων σωματιδίων με βάση τον κανόνα ανίχνευσης που θεσπίσαμε στο θεωρητικό μας μοντέλο, και ο ανιχνευτής καταγράφει έναν συνολικό αριθμό σωματιδίων σημαντικά μικρότερο από τον συνολικό αριθμό σωματιδίων που κατέφθασαν συνολικά σε αυτόν. Ο ανιχνευτής μας μπορεί λοιπόν να καταγράφει έναν «ψευδή» αριθμό σωματιδίων, όμως τα επιπλέον σωματίδια που πράγματι κατέφθασαν στην θέση αυτή δεν εξαφανίστηκαν. Μπορεί μεν τα επιπλέον αυτά σωματίδια να μην έχουν κανέναν τρόπο να δηλώσουν την παρουσία τους μέσω ανιχνευτών των συνήθων πεδίων της Φύσης αν πράγματι όλοι οι ανιχνευτές λειτουργούν με βάση το θεωρητικό μοντέλο που προτείνουμε, όμως η βαρυτική συνεισφορά τους μέσω της μάζας και την ενέργειάς τους δεν μπορεί να εξαφανιστεί. Στην περίπτωση αυτή, τα επιπλέον αυτά σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν με την συνήθη βαριονική ύλη, εκδηλώνουν όμως την παρουσία τους μέσω του γενικού πεδίου βαρύτητας του Σύμπαντος. Ίσως αυτό ακριβώς να είναι η λεγόμενη «Σκοτεινή Ύλη»: η διαφορά ανάμεσα στο πραγματικό υλικό περιεχόμενο του Σύμπαντος και στο περιεχόμενο που έχει μέχρι σήμερα ανιχνευτεί μέσω αλληλεπιδράσεων με κλασικούς ανιχνευτές που λειτουργούν όπως προτείνουμε. Σε μια μελλοντική εργασία μας θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε θεωρητικά την διαφορά αυτή.

Η πρότασή μας χρειάζεται επιπλέον ανάπτυξη. Ευελπιστούμε ότι σύντομα θα ρυθμίσουμε όλες τις παραμέτρους του μοντέλου ώστε να επιτύχουμε 100% συμφωνία με τα θεωρητικά αποτελέσματα της Κβαντομηχανικής. Όταν το επιτύχουμε αυτό, σκοπεύουμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο μας και σε άλλα συστήματα, σε 2 ή 3 διαστάσεις, με δυναμικά ή χωρίς, με ειδική θεωρία της σχετικότητας ή χωρίς. Αν η συμφωνία με την Κβαντομηχανική είναι πλήρης τότε θα μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μια εναλλακτική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής χωρίς το οντολογικό παράδοξο της δυϊκότητας σωματιδίου-κύματος. Στην περίπτωση που η ερμηνεία μας δεν γίνει τελικά αποδεκτή, φιλοδοξούμε να μπορέσουμε τουλάχιστον να χρησιμοποιήσουμε την προτεινόμενη μέθοδό μας ως μια νέα στοχαστική τεχνική (τύπου Monte Carlo) επίλυσης της εξίσωσης του Schrödinger σε ανοικτά και κλειστά συστήματα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχει τρόπος να ελεγχθεί πειραματικά η πρότασή μας ως εξής: Ένα κβαντικό διάγραμμα συμβολής χτίζεται σταδιακά με ένα-ένα σωματίδιο όπως έχει παρατηρηθεί πχ. στο πείραμα των Kolendenski et al. (2014). Η Κβαντομηχανική και η ισοδύναμη της κατά Bohm ερμηνεία υποθέτει ότι το κάθε ένα σωματίδιο κατά κάποιον τρόπο «γνωρίζει» την κυματοσυνάρτησή του και στα σημεία ανίχνευσής του χτίζεται σταδιακά το διάγραμμα συμβολής που προβλέπει η κυματοσυνάρτηση. Η δική μας ερμηνεία υποθέτει ότι το κλασικό σωματίδιο καταλήγει στα σημεία ανίχνευσής του όπου, ύστερα από πολλές επαναλήψεις του ίδιου πειράματος με τον ίδιο ανιχνευτή, ο ανιχνευτής χτίζει σταδιακά το διάγραμμα συμβολής συλλέγοντας πληροφορία από τα πολλά σωματίδια που καταφθάνουν σ' αυτόν. Αν υπήρχε η δυνατότητα να επαναληφθεί πολλές φορές ακριβώς το ίδιο πείραμα αλλά με διαφορετικούς ανιχνευτές, τότε, σύμφωνα με την συνήθη Κβαντομηχανική η συλλογή των ανιχνεύσεων των σωματιδίων θα παρουσίαζε διάγραμμα συμβολής, και σύμφωνα με την δική μας ερμηνεία δεν θα παρουσίαζε. Ένα τέτοιο πείραμα μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Αναφορές

Feynman R. P., Leighton R. B. and Sands M., 1965, The Feynman Lectures on Physics. Volume III, Addison-Wesley.

Bohm D., 1952, Phys. Rev., 85, 166.

Kolenderski P. et al., 2014, Sci. Rep., 4, 4685.

Nelson E., 1966, Phys. Rev., 150, 1079.

Ε΄ Προεργασία για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” ως προς την εκδήλωση γεγονότων ηλιακών ενεργη- τικών σωματιδίων

Μανώλης Κ. Γεωργούλης

Περίληψη

Η πρόγνωση ασταθειών και εκρηκτικών γεγονότων στον φυσικό κόσμο (σεισμοί, τσουνάμι, ανεμοστρόβιλοι, ηλιακές εκρήξεις κτλ.) αφορά χονδρικά σε μια δυαδική (NAI/OXI) ή πιθανολογική ($0 < P < 1$) εκτίμηση για την ένταση του γεγονότος σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα από την έκδοση της πρόγνωσης. Στο σημερινό διασυνδεδεμένο ιστό της ανθρώπινης δραστηριότητας, όμως, όπου πολλοί και διαφορετικοί τομείς εξαρτώνται από ή υλοποιούν τον επιχειρησιακό τους σχεδιασμό στη βάση αυτών των προγνώσεων, η πρόγνωση για τη μη εκδήλωση ενός ενδιαφέροντος γεγονότος είναι συχνά το ίδιο σημαντική με την πρόγνωση για την εκδήλωσή του. Στον αντίποδα της πρόγνωσης εκδήλωσης, συνεπώς, βρίσκεται η πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” (“All Clear”), η οποία προσφέρει, δυαδικά ή πιθανολογικά, μια απάντηση για το αν το συγκεκριμένο γεγονός δεν θα συμβεί εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτή η πρόγνωση είναι το ίδιο δύσκολη, αν όχι δυσκολότερη, από την πρόγνωση εκδήλωσης του γεγονότος· σε κάποιες άλλες, η μεθοδολογία για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” απλά δεν έχει διατυπωθεί ακόμα. Περιγράφουμε μια πιθανή μεθοδολογία για την προσέγγιση του “Όλα Καθαρά” ως προς τα γεγονότα ηλιακών ενεργητικών σωματιδίων (solar energetic particle [SEP] events) τα οποία είναι κεφαλαιώδους σημασίας για την προστασία του έμφυχου δυναμικού και της υλικοτεχνικής υποδομής των μελλοντικών επανδρωμένων αποστολών προς τη Σελήνη και, σε μεταγενέστερο χρόνο, προς τον Άρη. Η μεθοδολογία αναπτύχθηκε αρχικά ως άποψη στο πλαίσιο δεξαμενής σκέψης υποστηριζόμενης από τις National Aeronautics and Space Administration (NASA) και National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) των ΗΠΑ, χρησιμοποιείται όμως ήδη σε ένα βαθμό από το Data Mining Lab (DMLab) του Πολιτειακού Πανεπιστημίου της Georgia των ΗΠΑ, στο πλαίσιο ερευνητικού προγράμματος που χρηματοδοτείται από το NASA Space Radiation Analysis Group (SRAG) του Διαστημικού Κέντρου NASA Johnston Space Center.

Ε΄.1 Εισαγωγή

Τα γεγονότα ηλιακών ενεργητικών σωματιδίων (SEP events) αποτελούν την κορωνίδα του από τον Ήλιο προερχόμενου διαστημικού καιρού. Στο ισχυρά μαγνητισμένο χαμηλό στέμμα του Ήλιου, λίγες χιλιάδες χιλιόμετρα από την ορατή επιφάνειά του, τη φωτόσφαιρα, δημιουργούνται οι μαγνητοϋδροδυναμικές προϋποθέσεις εκείνες που οδηγούν σε αστάθειες οι οποίες εκδηλώνονται ως ηλιακές εκλάμψεις (solar flares) και στεμματικές εκτινάξεις μάζας (coronal mass ejections [CMEs]). Αξιοσημείωτες εκλάμψεις κλάσης C² και πάνω (δηλ. με μέγιστη ροή φωτονίων που υπερ-

²<https://www.swpc.noaa.gov/phenomena/solar-flares-radio-blackouts>

βαίνει τα 10^{-6} W/m^2) προκύπτουν κατά βάση πάνω από ισχυρά συσσωματώματα φωτοσφαιρικής μαγνητικής ροής, γνωστά και ως κέντρα δράσης (active regions). Τα κέντρα δράσης είναι η ισοδύναμη έκφανση των συμπλεγμάτων ηλιακών κηλίδων που παρατηρούνται στη οπτική περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος εδώ και αιώνες (Bruzek, 1972; Harvey and Zwaan, 1993; van Driel-Gesztelyi and Green, 2015, και αναφορές εντός). Δεν παράγουν όλα τα κέντρα δράσης μεγάλες εκλάμψεις και CMEs: μια μειοψηφία μόνο είναι κατά βάση εκρηκτικά. Ενώ CMEs χαμηλότερης κινητικής ενέργειας (και άρα ταχύτητας διάδοσης, για σχετικά καλά καθορισμένη μάζα της τάξης των $10^{15} - 10^{16} \text{ g}$) είναι δυνατό να προκύψουν και στον ήρεμο Ήλιο (εκτός κέντρων δράσης) απουσία εκλάμψεων, οι CMEs που προκύπτουν σε κέντρα δράσης είναι στατιστικά ταχύτερες, με προβαλλόμενη ταχύτητα στο επίπεδο του ουρανού (plane-of-sky) $> 750 \text{ km/s}$ και σχετίζονται πάντα με εκλάμψεις (για παράδειγμα Sheeley, Walters, Wang et al., 1999; Georgoulis, 2008). Αντίθετα, μπορεί να προκύψουν ακόμα και μεγάλες εκλάμψεις χωρίς CMEs σε κέντρα δράσης, ωστόσο μεγαλύτερο μέγεθος έκλαμψης σημαίνει στατιστικά μεγαλύτερη πιθανότητα συσχέτισης με CME (Yashiro, Gopalswamy, Akiyama et al., 2005). Αυτό σημαίνει ότι τα εκρηκτικά φαινόμενα με χρόνο εκδήλωσης που κυμαίνεται από λεπτά μέχρι ώρες, και πιο συγκεκριμένα οι μεγάλες εκλάμψεις και οι CMEs μεγάλης ταχύτητας, τροφοδοτούνται από το κυρίαρχο απόθεμα μαγνητικής ενέργειας των κέντρων δράσης, το οποίο αποθηκεύεται σε αυτές τις δομές πολύ πιο αργά, σε περιόδους δεκάδων ωρών ή ημερών (Parker, 1972; Priest, 1982; Parker, 1983; Wiegmann, Thalmann and Solanki, 2014, και αναφορές εντός).

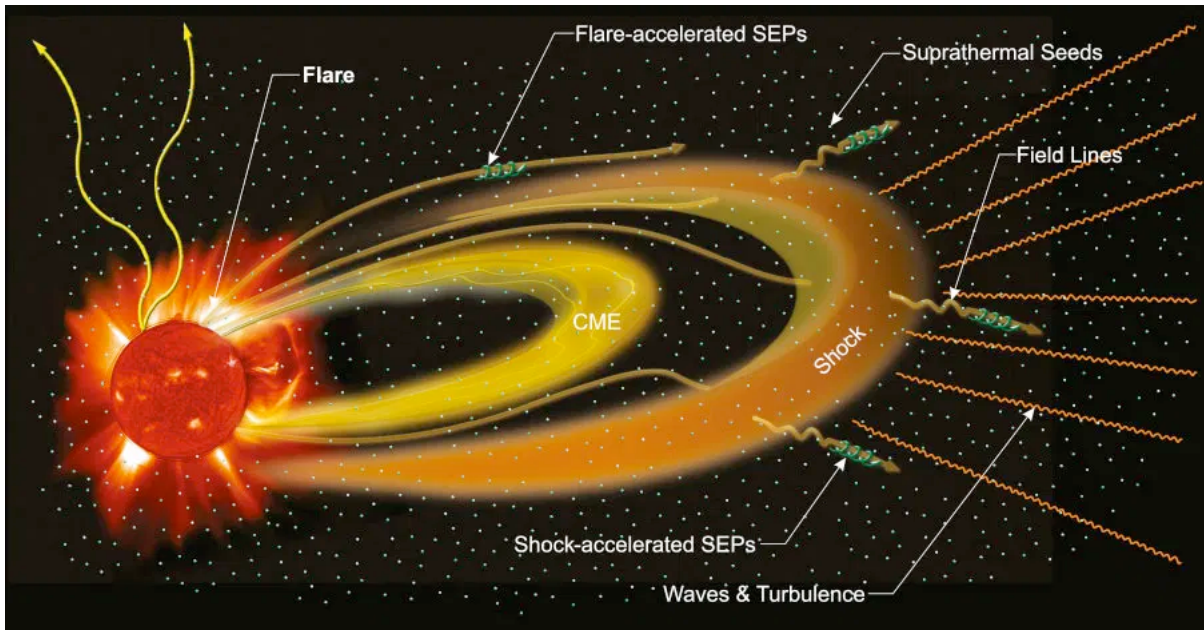
Η διάδοση των CMEs από το στέμμα του Ήλιου στην ηλιόσφαιρα δεν γίνεται φυσικά στο κενό, αλλά στο υπόβαθρο του ηλιακού ανέμου (Parker, 1958), ο οποίος εκρέει από τον Ήλιο με προβαλλόμενες ταχύτητες της τάξης των $400 - 800 \text{ km/s}$ (McComas, Elliott, Gosling et al., 2002; McComas, Elliott, Schwadron et al., 2003). Στην περίπτωση σχετικά αργών CMEs με ταχύτητες της τάξης των μερικών εκατοντάδων km/s δημιουργείται σαφώς μια διαταραχή στον ηλιακό άνεμο η οποία φθίνει αργά μετά την πάροδο του παλμού της CME. Σε περίπτωση ταχέων CMEs, όμως, με ταχύτητες σαφώς μεγαλύτερες από την ταχύτητα του ταχέως ηλιακού ανέμου³, δεν μπορεί παρά να δημιουργηθεί ένα κρουστικό κύμα μπροστά από τη CME. Έτσι γεννάται μια κατάσταση η οποία περιγράφεται γραφικά από την εικόνα του Σχ. Ε'1.

Ε'2 Βασικοί ορισμοί και προϋποθέσεις

Αναφέραμε ήδη τον αντικειμενικό σκοπό αυτής της δραστηριότητας, ο οποίος είναι η πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” ως προς την εκδήλωση των γεγονότων SEP. Τι είναι, όμως, ένα γεγονός SEP; Στο Σχ. Ε'2 (πάνω) φαίνεται ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα γεγονότος SEP το οποίο προέκυψε σε μια περίοδο έντονης ηλιακής δραστηριότητας κατά το διάστημα Οκτωβρίου - Νοεμβρίου 2003.

Ένα SEP γεγονός είναι συνεπώς η αύξηση της ροής σωματιδίων (πρωτονίων, με το ενδιαφέρον να εστιάζεται κυρίως σε αυτά λόγω της σχετικά μεγάλης μάζας τους) μεγάλων ενεργειών. Η επιτάχυνση των πρωτονίων σε μεγάλες, σχετικιστικές

³Υπενθυμίζεται ότι οι ταχύτητες των CMEs κοντά στον Ήλιο μπορούν να ξεπεράσουν σημαντικά τις 3000 km/s (Webb and Howard, 2012, και αναφορές εντός).



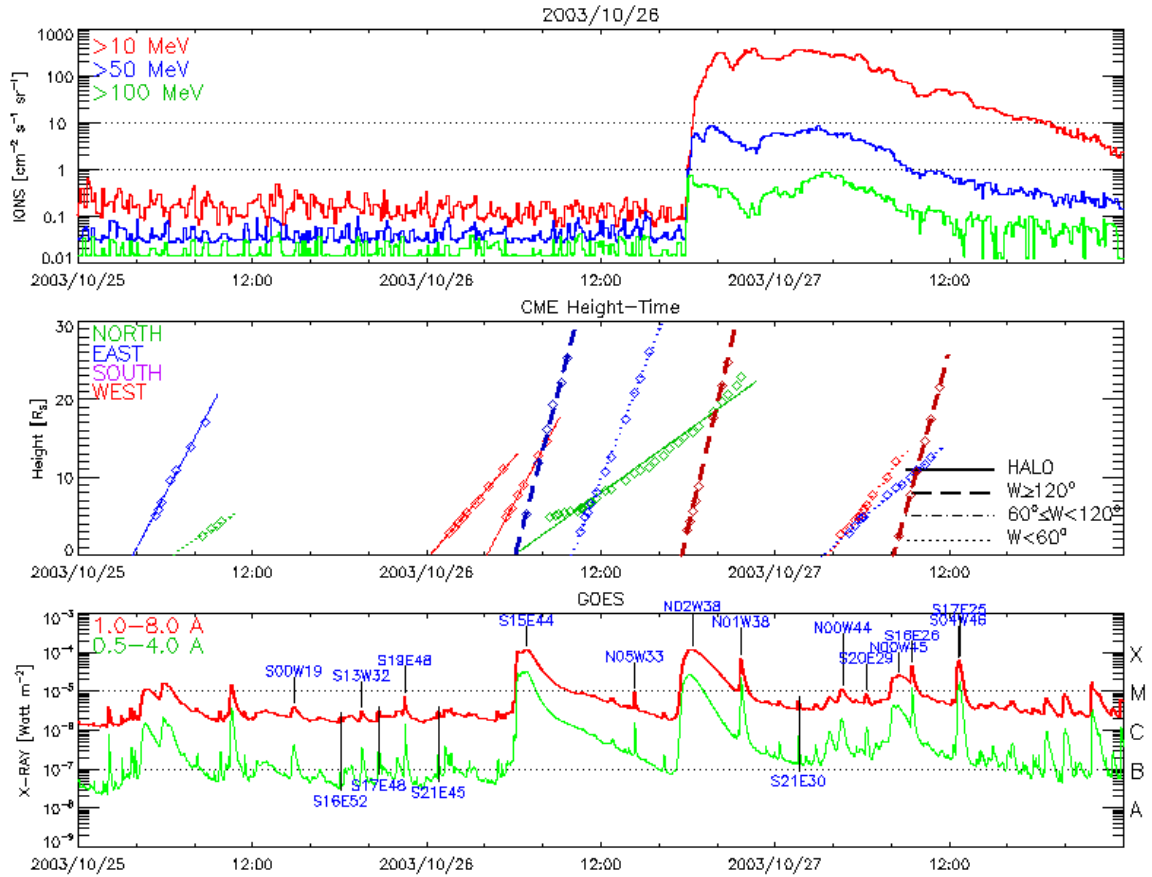
Σχήμα Ε'1: Γραφική αναπαράσταση μιας ηλιακής έκρηξης και των συνεπειών της, με την έκλαμψη, τη CME, το κρουστικό κύμα μπροστά από τη CME και τα γεγονότα SEP που προκύπτουν, τόσο από απευθείας επιτάχυνση σωματιδίων στην περιοχή της έκλαμψης όσο και από το κρουστικό κύμα της CME (Πηγή: Desai and Burgess (2008)).

ενέργειες, επιτυγχάνεται λόγω της έκλυσης μαγνητικής ενέργειας που είναι υπεύθυνη για τις ηλιακές εκρήξεις. Για να αναγνωριστεί ένα γεγονός SEP ως τέτοιο, η μέγιστη ροή σωματιδίων για συγκεκριμένα κατώφλια ενέργειας πρέπει να ξεπεράσει μια συγκεκριμένη τιμή. Η NOAA έχει θεσπίσει μια ευρέως αποδεκτή κλίμακα μεγεθών των γεγονότων SEP, τη λεγόμενη S-scale⁴ με βάση την τιμή μέγιστης ροής $10 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ (10 particle flux units [pfu]) για πρωτόνια με κατώφλι ενέργειας $> 10 \text{ MeV}$ (S1-scale). Θα κρατήσουμε αυτό τον ορισμό ενός γεγονότος SEP στη συνέχεια. Λογαριθμικά, η κλίμακα γεγονότων SEP γίνεται S2 - S5 για μέγιστες ροές που ξεπερνούν τις τιμές 10^2 - $10^5 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ για πρωτόνια ίδιου κατωφλίου ενέργειας. Συνεπώς, στο Σχ. Ε'2 το γεγονός SEP έχει φτάσει την κλίμακα S1 (δεύτερη οριζόντια εστιγμένη γραμμή) αλλά και την κλίμακα S2 (ροή $> 100 \text{ pfu}$ για ενέργειες $> 10 \text{ MeV}$) πριν κλιμακωθεί.

Γίνεται σαφές ότι με τον ίδιο τρόπο που επιχειρείται η πρόγνωση γεγονότος ή “Όλα Καθαρά” για την κλίμακα S1, θα μπορούσε να επιχειρηθεί η πρόγνωση ή το “Όλα Καθαρά” για τις παραπάνω κλίμακες SEP γεγονότων. Επιπλέον, κάθε πρόγνωση υπόκειται σε ένα παράθυρο ισχύος πρόγνωσης (12, 24, ή παραπάνω ωρών) και σε ένα περιθώριο έναρξης του παραθύρου ισχύος (latency). Για παράδειγμα, πρόγνωση παραθύρου ισχύος 12 ωρών και περιθωρίου 3 ωρών που εκδίδεται στις 00:00 αρχίζει να ισχύει στις 03:00 και έχει ισχύ ως τις 15:00. Για περιθώριο 0 ωρών το παράθυρο ισχύος αρχίζει με την έκδοση της πρόγνωσης.

Η προσέγγισή μας, όπως έχει γίνει ξεκάθαρο, είναι ολιστική, δηλαδή λαμβάνει υπόψη της πλήρως την ηλιακή έκρηξη που δρα ως γεννήτορας ενός γεγονότος SEP. Πρόκειται για μεθοδολογία που ξεκινά από την ηλιακή φωτόσφαιρα και καταλήγει στο γεωδιάστημα, δηλ. το απώτατο άκρο της εσωτερικής ηλιόσφαιρας. Έχει ανα-

⁴<https://www.swpc.noaa.gov/noaa-scales-explanation>



Σχήμα Ε'.2: Χρονοσειρές εκδήλωσης μιας ηλιακής έκρηξης που καταλήγει σε γεγονός SEP στο γεωδιάστημα. Συγκεκριμένα, πρόκειται για εκρηκτική έκλαμψη GOES κλάσης X1.2 (κάτω) συνοδευόμενη από ταχεία CME με ταχύτητα 1537 km/s (μέσο) η οποία εκτοξεύεται από το κέντρο δράσης NOAA active region (AR) 10484 σε ηλιογραφικές συντεταγμένες N02W38 με χρόνο παρατήρησης 2003-Οκτ-26 17:54 UT. Το γεγονός SEP (πάνω) αναγνωρίζεται με χρόνο έναρξης 2003-Οκτ-26 18:00 UT ενώ κορυφώνεται στις 2003-Οκτ-26 22:35 UT. Οι χρονοσειρές με διαφορετικά χρώματα αφορούν σε διαφορετικά κατώφλια ενέργειας των πρωτονίων που αποτελούν το γεγονός SEP (Πηγή: βάση δεδομένων SEP NASA/CDAW - https://cdaw.gsfc.nasa.gov/CME_list/sepe/).

πτυχθεί από τους Papaioannou, Sandberg, Anastasiadis et al. (2016); Anastasiadis, Papaioannou, Sandberg et al. (2017); Georgoulis, Papaioannou, Sandberg et al. (2018); Aminalragia-Giamini, Jiggins, Anastasiadis et al. (2020) με τις πρώτες, όχι τόσο λεπτομερείς, προσπάθειες να έχουν καταβληθεί από τους Falconer, Moore, Barghouty et al. (2014); Engell, Falconer, Schuh et al. (2017) και τον Núñez (2011).

Επιπλέον, η προσέγγισή μας για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” λαμβάνει υπόψη τις παρακάτω απλουστευτικές προϋποθέσεις:

- Δεδομένου ότι η πρόγνωση της κατεύθυνσης της CME (Σχ. Ε'.1) δεν μπορεί να γίνει πριν την παρατήρησή της (nowcasting), υιοθετείται η περισσότερο σοβαρή για τη Γη περίπτωση της διάδοσης κατά μήκος της γραμμή Ηλίου - Γης στο επίπεδο της εκλειπτικής (worst case scenario – halo CMEs).
- Γεγονότα SEP απουσία CME αγνοούνται. Τέτοια φαινόμενα μπορούν να προκύψουν στην περίπτωση που μια CME εκτοξεύεται από το “μακρινό” από τη Γη ηλιακό ημισφαίριο και είναι αρκετά εμφανής για να παρατηρηθεί η διάδοσή

της στην εσωτερική ηλιόσφαιρα. Μπορούν επίσης να παρατηρηθούν στην περίπτωση περιπλοκών καταστάσεων ή απευθείας από εκλάμψεις (π.χ., Reames, 2020), περιπτώσεις που δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

- Άλλες περίπλοκες καταστάσεις, όπως ή ύπαρξη πληθυσμών πρωτονίων παγιδευμένων κοντά στον Ήλιο (seed particles) τα οποία περιμένουν την κατάλληλη διαταραχή για να επιταχυνθούν ή η εκτόξευση πολλαπλών CMEs που διαταράσσουν την εσωτερική ηλιόσφαιρα και την προετοιμάζουν για διάδοση ευκολότερη απ' ό,τι όταν είναι αδιατάρακτη (heliospheric preconditioning), αγνοούνται.

Ε.3 Μέθοδος και δεδομένα

Η προτιμώμενη μέθοδος πρόγνωσης του “Όλα Καθαρά” απαρτίζεται από τρία επίπεδα σταδιακά αυξανόμενης πολυπλοκότητας:

- Βασικό επίπεδο (baseline): χρήση μόνο των ιδιοτήτων της ηλιακής έκρηξης, όχι όμως και της ηλιογραφικής θέσης της. Χωρίζεται σε δύο υποεπίπεδα:
 - Υποεπίπεδο (Variant) 1: χρήση μόνο του μεγέθους της έκλαμψης.
 - Υποεπίπεδο (Variant) 2: χρήση μόνο της ταχύτητας της CME.
- Ενισχυμένο επίπεδο (enhanced baseline): χρήση μεγέθους έκλαμψης, ταχύτητας της CME και ηλιογραφικής θέσης της ηλιακής έκρηξης.
- Ευέλικτο επίπεδο, σχετιζόμενο με επιλεγμένα μεγέθη γεγονότων SEP (event specific): χρήση όλων των παραπάνω αλλά και μεταβαλλόμενου μεγέθους SEP σε σχέση με τη μέγιστη ροή πρωτονίων, το συνολικό πληθυσμό πρωτονίων (fluence), τη διάρκεια του SEP γεγονότος, τον ανοδικό χρόνο ή χρόνο κλιμάκωσής του (rise time), κτλ.

Η όποια μέθοδος στατιστικής αξιολόγησης θα πρέπει να στηρίζεται σε στατιστικό δείγμα το οποίο θα πρέπει να είναι κατά το δυνατό αντιπροσωπευτικό. Στην περίπτωσή μας, η ανάλυση στηρίζεται στη βάση δεδομένων γεγονότων SEP την οποία κατέχει το Εργαστήριο Εξόρυξης Δεδομένων (Data Mining Lab [DMLab]) του Πολιτειακού Πανεπιστημίου της Georgia των ΗΠΑ. Αφορά σε 206 γεγονότα SEP τα οποία έχουν ανιχνευθεί από τους δορυφόρους GOES της NOAA κατά το διάστημα Νοέμβριος 1997 – Σεπτέμβριος 2017. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.2, η πλειοψηφία των γεγονότων πληρεί τα κριτήρια της S1-scale της NOAA ενώ οι ηλιογραφικές συντεταγμένες των εκρηκτικών κέντρων δράσης οι εκρήξεις των οποίων οδήγησαν σε αυτά τα γεγονότα, όπου αυτές είναι γνωστές, δίνονται στο Σχ. Ε'3.

Προσεκτική παρατήρηση της χωρικής κατανομής του Σχ. Ε'3 θα καταδείξει ότι γεγονότα SEP που ανιχνεύονται στο γεωδιάστημα τείνουν να ξεκινούν από κέντρα δράσης που βρίσκονται στο δυτικό ηλιακό ημισφαίριο, πέρα από τον ηλιογραφικό μεσημβρινό W20. Αυτή είναι μια διαπίστωση αρκετών δεκαετιών και οφείλεται στη σπειροειδή μορφολογία του ηλιοσφαιρικού μαγνητικού πεδίου (σπείρα του Parker (1958)) η οποία οδηγεί σε καλύτερη μαγνητική συνδεσιμότητα με το γεωδιάστημα εκείνες τις περιοχές του Ήλιου. Είναι συνεπώς αναμενόμενο ότι γεγονότα SEPs που προέρχονται από κέντρα δράσης αρκετά εντός του δυτικού ημισφαιρίου τείνουν έχουν

	Όλα τα γεγονότα	Γεγονότα $\geq S1$ -scale
Σύνολο	206	157
Κέντρα δράσης γνωστά	173	134
Μέγεθος εκλάμψεων γνωστό	180	140
Ταχύτητα CME γνωστή	188	143
Ολόκληρη η πληροφορία γνωστή	162	124

Πίνακας 1.2: Σύνοψη της βάσης δεδομένων γεγονότων SEP του Εργαστηρίου GSU/DMLab, τα οποία έχουν ανιχνευθεί στο διάστημα Νοέμβριος 1997 – Σεπτέμβριος 2017. Τα γεγονότα αφορούν στο μεγαλύτερο και πιο δραστήριο τμήμα δύο ηλιακών κύκλων, των 23 (1997 – 2008) και 24 (2009 – 2020, περίπου).

περισσότερο απότομη χρονοσειρά ροής πρωτονίων (impulsive events) η οποία κλιμακώνεται γρήγορα στη μέγιστη ροή, ενώ ανιχνεύονται στο γεωδιάστημα πολύ σύντομα, ακόμα και ~ 10 ή λίγες δεκάδες λεπτά μετά την παρατήρηση της ηλιακής έκρηξης. Γεγονότα SEPs των οποίων τα κέντρα δράσης βρίσκονται σε ανατολικότερα ηλιογραφικά μήκη τείνουν να είναι περισσότερο σταδιακά (gradual events), να χρειάζονται έως και αρκετές ώρες για να φτάσουν στο μέγιστο ροής και να φτάνουν στη Γη με καθυστέρηση πολλών ωρών (Cane, Reames and von Rosenvinge, 1988; Lario and Simnett, 2004). Σε περιπτώσεις σταδιακών γεγονότων SEP, η 'απότομη' περιοχή της χρονοσειράς της ροής έχει προκύψει προς άλλη κατεύθυνση στο ηλιακό σύστημα, έχοντας 'αστοχήσει' να συναντηθεί με το γεωδιάστημα. Μια εύγλωττη εικόνα αυτής της διαπίστωσης δίνεται στο Σχ. Ε'4.

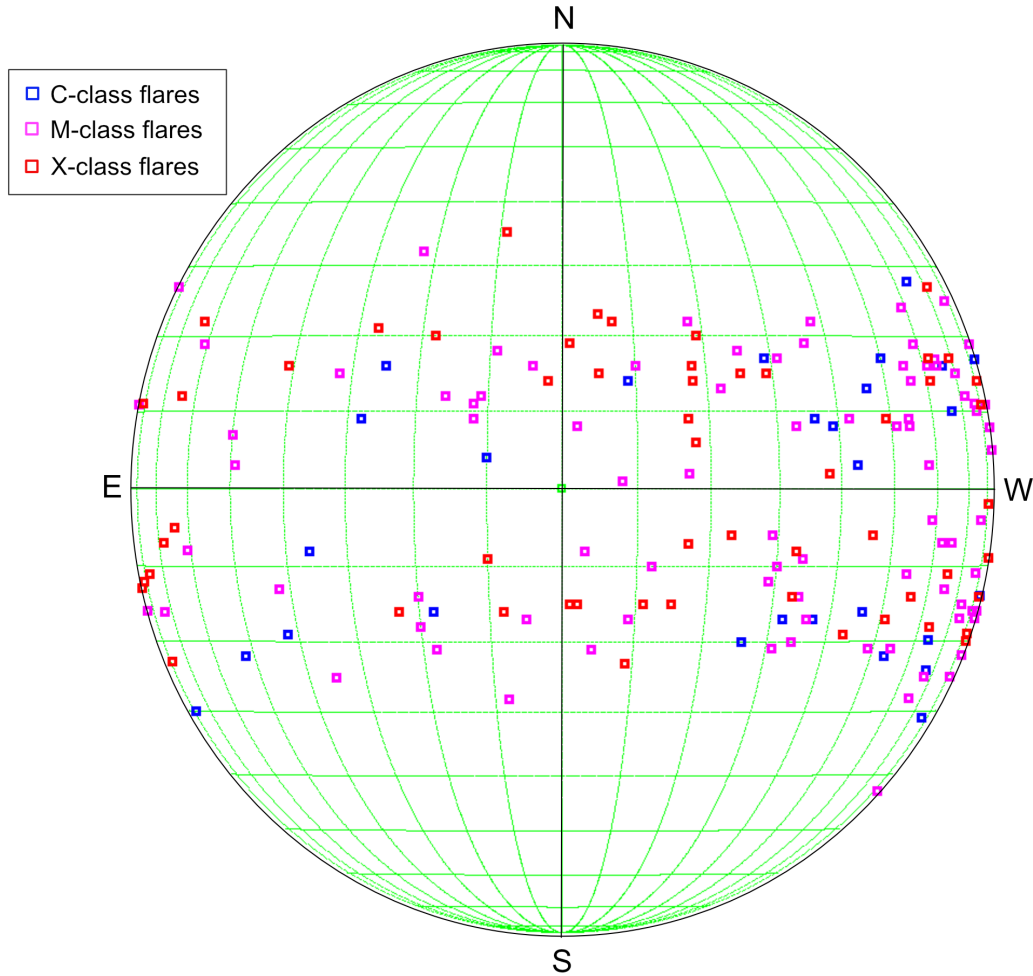
Στη συνέχεια περιγράφονται τα πρώτα αποτελέσματα από την εφαρμογή των παραπάνω προσεγγίσεων για την πρόγνωση του "Όλα Καθαρά".

Ε'4 Εφαρμογή και Αρχικά αποτελέσματα

Ε'4.1 Βασικό επίπεδο (Υποεπίπεδο 1)

Σε αυτή την προσέγγιση χρησιμοποιούμε μόνο το μέγεθος της έκλαψης, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη μας άλλη πληροφορία. Δεδομένου ότι επιδιώκουμε την πρόγνωση του "Όλα Καθαρά", επιλέγουμε να κινηθούμε στη βάση της ανίχνευσης ακραίων τιμών (outlier detection) του μεγέθους των εκλάμψεων για τις οποίες η πιθανότητα εκδήλωσης SEP γεγονότος στο γεωδιάστημα είναι στατιστικά χαμηλή. Προσδιορίζοντας το 'χαμηλή' στο 5% κατ' ανώτερη τιμή, μπορούμε να πάρουμε την εικόνα του Σχ. Ε'5. Το Σχ. Ε'5 δηλώνει ότι, για τους τελευταίους δύο ηλιακούς κύκλους, τουλάχιστον, εκλάμψεις μεγέθους C2 και κάτω (δηλ. με μέγιστη ροή φωτονίων $\leq 2 \times 10^{-6} W/m^2$) έχουν κάτω από 5% πιθανότητα να δώσουν έκρηξη με γεγονός SEP στο γεωδιάστημα (ακόμα και κάτω από μέγεθος S1), ανεξάρτητα της θέσης του κέντρου δράσης στον ηλιακό δίσκο.

Συνεπώς, σε αυτή την (απλή, ή και υπεραπλουστευμένη, σε κάποιο βαθμό) προσέγγιση, μπορούμε να δηλώσουμε "Όλα Καθαρά" όταν η πιθανότητα πρόγνωσης έκλαμψης μεγέθους $\geq C2$ είναι χαμηλή. Φυσικά, θα πρέπει να υπάρχει μια πιθα-

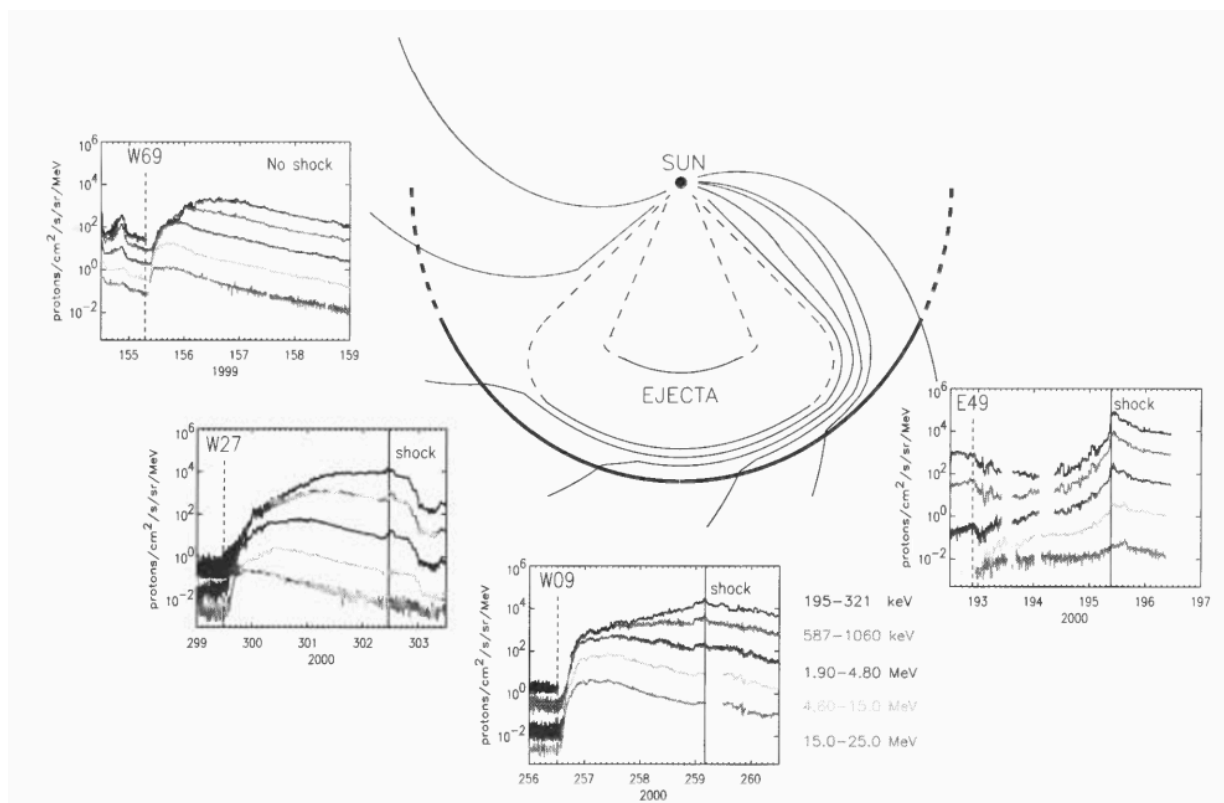


Σχήμα Ε'3: Ηλιογραφικές θέσεις των 134 γεγονότων SEP μεγέθους $\geq S1$ της βάσης δεδομένων GSU/DMLab κατά το χρόνο έναρξης των ηλιακών εκρήξεων που έδωσαν τα γεγονότα αυτά. Οι αδρομερείς κατηγορίες των εκλάμψεων σε αυτές τις ηλιακές εκρήξεις δίνονται επίσης με μπλε (μέγεθος C), ροζ (μέγεθος M) και κόκκινο (μέγεθος X).

νότητα εκδήλωσης έκλαμψης και αυτό το ερευνητικό πεδίο έχει δώσει λαβή σε μια ογκώδη, συνεχώς αυξανόμενη βιβλιογραφία τα τελευταία χρόνια. Εκτεταμένες επισκοπήσεις των μεθόδων πρόγνωσης ηλιακών εκλάμψεων μπορεί να βρει κανείς στους Leka and Barnes (2018); Georgoulis, Bloomfield, Piana et al. (2021), ενώ λεπτομερείς συγκρίσεις πολλών μεθόδων πρόγνωσης που λειτουργούν σε καθημερινή βάση ανά την υφήλιο μπορούν να αναζητηθούν στους Barnes, Leka, Schrijver et al. (2016); Leka, Park, Kusano et al. (2019a,b); Park, Leka, Kusano et al. (2020).

Ε'4.2 Βασικό επίπεδο (Υποεπίπεδο 2)

Σε αυτή την προσέγγιση χρησιμοποιούμε μόνο τη γραμμική ταχύτητα της CME στα πρώτα στάδια της εκτόξευσής της από τον Ήλιο (π.χ., μεσαίο διάγραμμα του Σχ. Ε'2), χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη μας άλλη πληροφορία. Επαναλαμβάνουμε την προσέγγιση της προηγούμενης παραγράφου, επιδιώκοντας την ανίχνευση ακραίων τι-

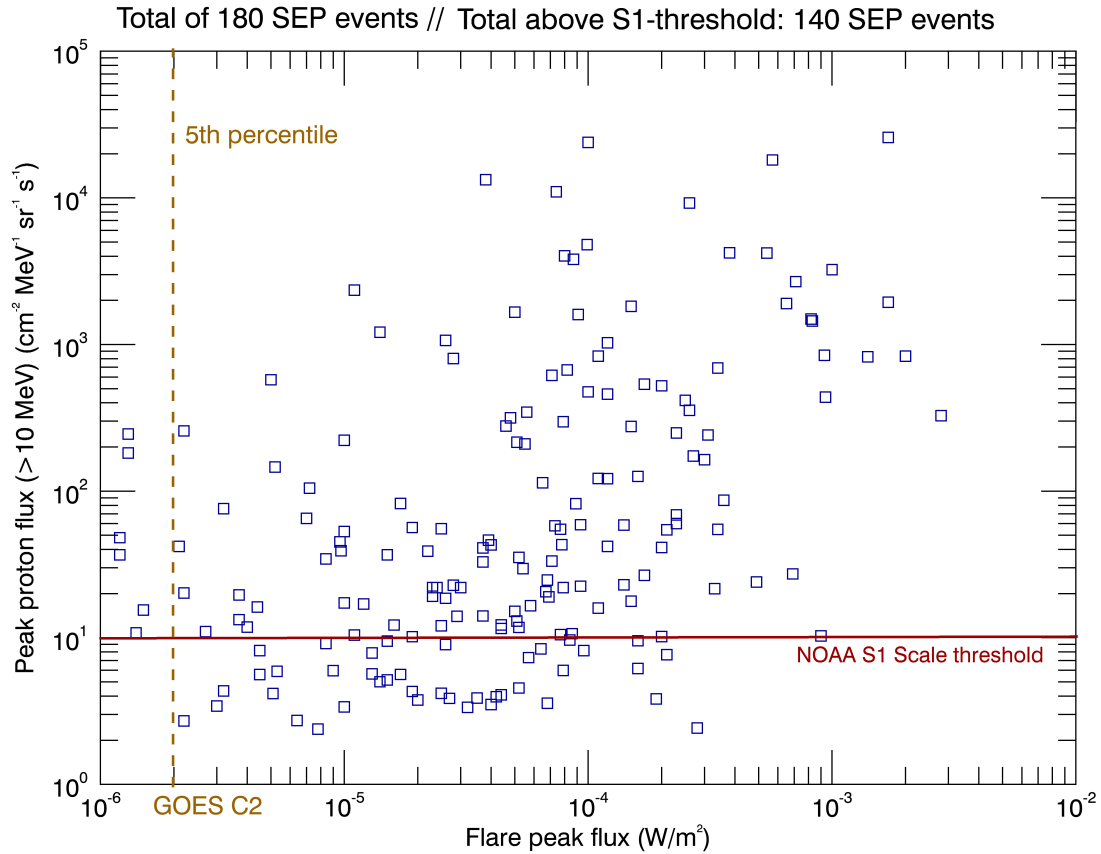


Σχήμα Ε'4: Χρονική εξέλιξη τεσσάρων παρατηρούμενων γεγονότων SEP των οποίων τα κέντρα δράσης βρίσκονται σε διαφορετικά ηλιογραφικά μήκη. Είναι σαφής η διαφορά της μορφολογίας των χρονοσειρών της ροής πρωτονίων, η οποία γίνεται περισσότερο σταδιακή όσο πιο ανατολικά βρίσκεται το κέντρο δράσης (Πηγή: Lario and Simnett (2004)).

μών της ταχύτητας των CMEs, για τις οποίες η πιθανότητα εκδήλωσης SEP γεγονότος στο γεωδιάστημα είναι εξίσου χαμηλή. Στο Σχ. Ε'6 δίνεται αυτή η πληροφορία, όπου η πιθανότητα εκδήλωσης γεγονότος SEP είναι το πολύ 5%, κατά τα γνωστά.

Όπως φαίνεται από το Σχ. Ε'6, για τους δυο πιο πρόσφατους ηλιακούς κύκλους, τουλάχιστον, γραμμικές ταχύτητες CME κάτω από 800 km/s έχουν πιθανότητα το πολύ 5% να συσχετιστούν με γεγονός SEP στο γεωδιάστημα, ανεξάρτητα από την ηλιογραφική θέση του κέντρου δράσης που έδωσε τη CME. Παρατηρούμε επίσης ότι για γραμμικές ταχύτητες < 800km/s παίρνουμε γεγονότα SEP κυρίως κάτω από το κατώφλι S1.

Αυτή η ελάχιστη ταχύτητα έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία καθώς οριοθετεί χονδρικά την ανώτερη ταχύτητα του ταχέως ηλιακού ανέμου. Για την παραγωγή γεγονότων SEP απαιτείται κρουστικό κύμα στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων (δείτε, π.χ., τη συζήτηση στην εισαγωγή των Georgoulis, Papaioannou, Sandberg et al. (2018)) και αναφορές εντός. Σχετικά ασθενή κρουστικά κύματα προκύπτουν και κάτω από τα 800 km/s σε υπόβαθρο αργού ηλιακού ανέμου (≥ 400 km/s), γι αυτό και η παραγωγή SEP γεγονότων γι αυτές τις ταχύτητες αφορά κυρίως σε γεγονότα < S1. Αυτές οι διαπιστώσεις έχουν γίνει και από τους Sheeley, Walters, Wang et al. (1999), οι οποίοι διαχωρίζουν τις αργές από τις ταχείες CMEs με βάση την ταχύτητα των 750 km/s, ενώ ο Georgoulis (2008) συσχετίζει φωτοσφαιρικά χαρακτηριστικά σε δείγμα μερικών δεκάδων εκρηκτικών κέντρων δράσης με γραμμικές ταχύτητες CMEs

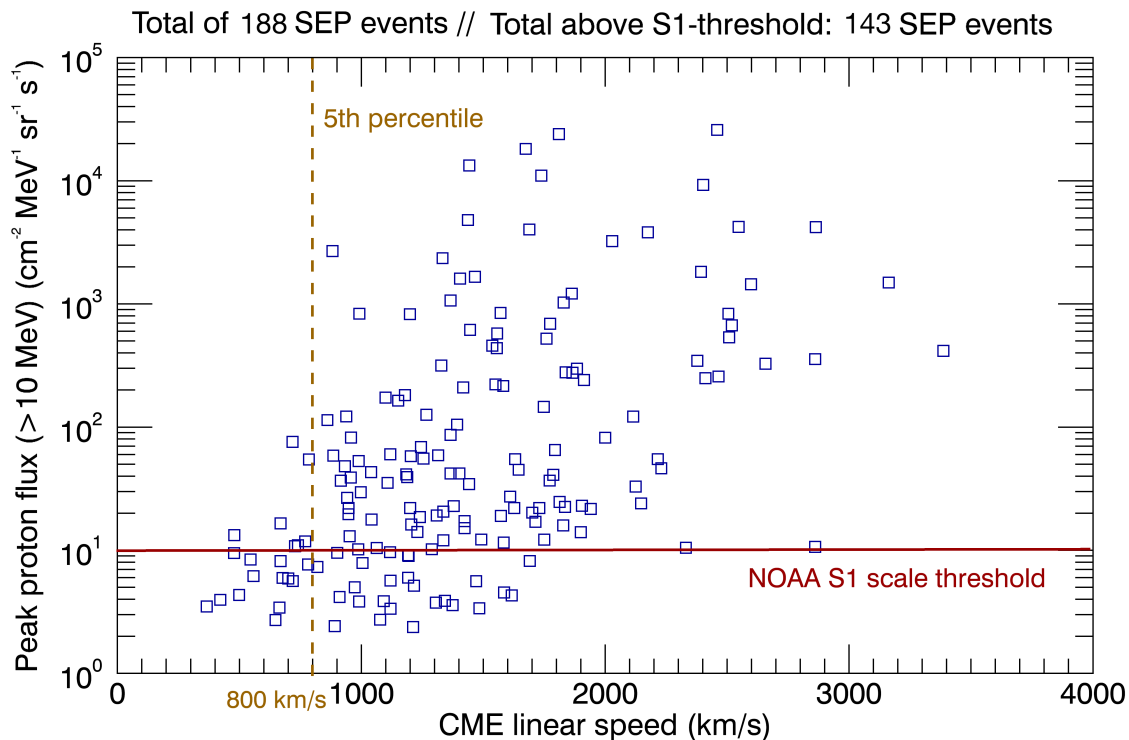


Σχήμα Ε.5: Διάγραμμα διασποράς που συσχετίζει τη μέγιστη ροή πρωτονίων γεγονότων SEP στο γεωδιάστημα με τη μέγιστη ροή φωτονίων της σχετικής έκλαμψης. Η οριζόντια συνεχής γραμμή δίνει σχηματικά το κατώφλι γεγονότος S1. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή δίνει το μέγεθος της έκλαμψης που αντιστοιχεί στο 5^ο εκατοστημόριο της πιθανότητας εκδήλωσης γεγονότος SEP.

$\geq 900 \text{ km/s}$.

Συνεπώς, και σε αυτή την απλή προσέγγιση, μπορούμε να δηλώσουμε “Όλα Καθαρά” όταν η πιθανότητα για CME με γραμμική ταχύτητα κοντά στον Ήλιο $\geq 800 \text{ km/s}$ είναι χαμηλή. Είναι σημαντικό, όμως, να αναφερθούμε σύντομα στο πώς προκύπτει μια πρόγνωση της ταχύτητας CME πριν αυτή τη CME συμβεί. Υπάρχει μια διογκούμενη βιβλιογραφία και ως προς αυτό το θέμα (Georgoulis, 2008; Falconer, Barghouty, Khazanov et al., 2011; Falconer, Moore, Barghouty et al., 2014; Murray, Guerra, Zucca et al., 2018; Kontogiannis, Georgoulis, Guerra et al., 2019) της οποίας φιλοσοφία είναι η συσχέτιση φωτοσφαιρικών χαρακτηριστικών των κέντρων δράσης με τις ταχύτητες των CMEs τις οποίες πιθανώς θα δώσουν.

Η πιθανότητα εμφάνισης μιας CME από ένα κέντρο δράσης αφορά στο ερευνητικό αντικείμενο της πρόγνωσης CMEs για το οποίο έχουν δημοσιευθεί τόσο στατιστικές μέθοδοι όσο και μέθοδοι μηχανικής μάθησης (Falconer, Barghouty, Khazanov et al., 2011; Falconer, Moore, Barghouty et al., 2014; Bobra and Ilonidis, 2016; Anastasiadis, Papaioannou, Sandberg et al., 2017). Στο Σχ. Ε.7 δίνεται παράδειγμα στατιστικής μεθόδου όπου τιμές μιας φωτοσφαιρικής παραμέτρου (αριστερά, οριζόντιος άξονας)



Σχήμα Ε'6: Διάγραμμα διασποράς που συσχετίζει τη μέγιστη ροή πρωτονίων γεγονότων SEP στο γεωδιάστημα με τη γραμμική ταχύτητα της σχετικής CME. Η οριζόντια συνεχής γραμμή δίνει σχηματικά το κατώφλι γεγονότος S1. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή δίνει την ταχύτητα της CME που αντιστοιχεί στο 5^ο εκατοστημόριο της συνολικής πιθανότητας εκδήλωσης γεγονότος SEP.

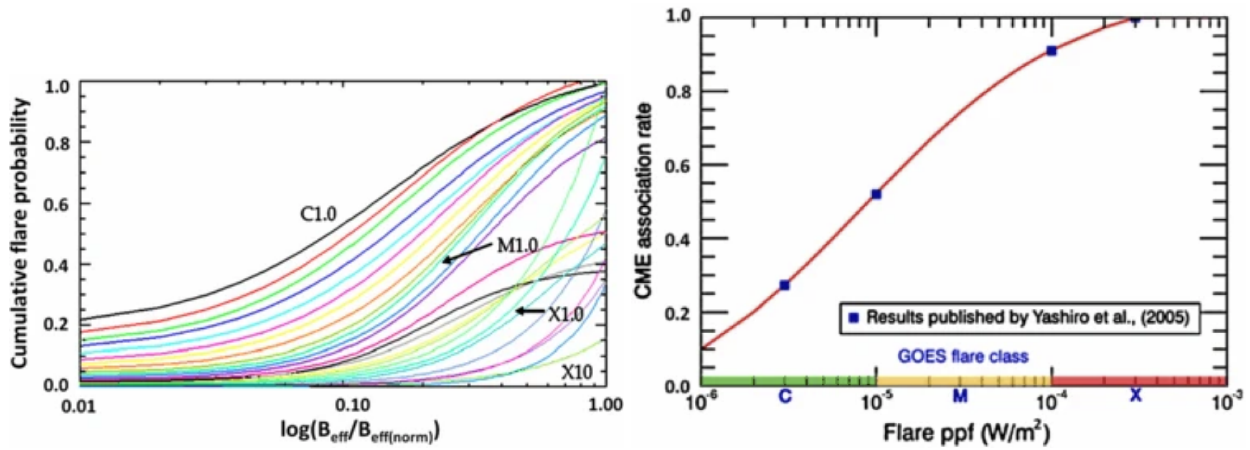
δίνουν ενδεικτικές πιθανότητες για όλα τα βασικά μεγέθη εκλάμψεων ενώ κάθε μέγεθος έκλαμψης σχετίζεται με μια πιθανότητα εμφάνισης CME (δεξιά). Συνεπώς, η τιμή της πιθανότητας εμφάνισης CME για δεδομένη τιμή της φωτοσφαιρικής παραμέτρου δίνεται από το γινόμενο της πιθανότητας εκδήλωσης της έκλαμψης επί την πιθανότητα συσχέτισης της συγκεκριμένης έκλαμψης με μια CME.

Ε'4.3 Ενισχυμένο επίπεδο

Σε αυτή την πιο λεπτομερή προσέγγιση για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” λαμβάνονται υπόψη το μέγεθος της έκλαμψης, η γραμμική ταχύτητα της CME και το ηλιογραφικό μήκος του εκρηκτικού κέντρου δράσης. Το ηλιογραφικό πλάτος αγνοείται λόγω της συγκέντρωσης των κέντρων δράσης στη σχετικά στενή ζώνη κέντρων δράσης (active region belt) η οποία εκτείνεται σε ηλιογραφικά πλάτη $\pm 30^\circ$.

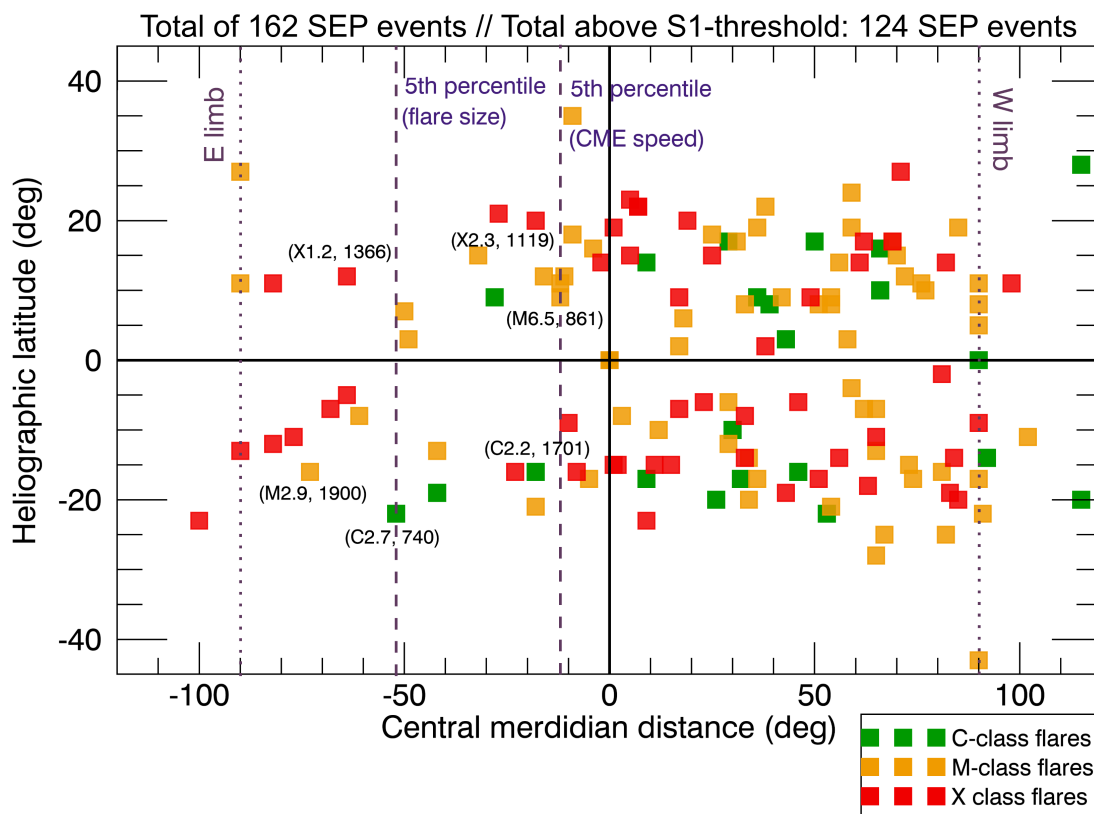
Αυτή η προσέγγιση έχει στόχο έναν πιο λεπτομερή ορισμό για την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” ο οποίος στηρίζεται σε διαφορετικές μεσημβρινές ζώνες στον ηλιακό δίσκο. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τα παρακάτω βήματα:

- (α) Βρίσκουμε την ανατολικότερη θέση κέντρου δράσης η οποία δίνει έκλαμψη σχετιζόμενη με γεγονός SEP μεγέθους κατά το δυνατό κοντά στο κατώτερο όριο της παρ. 4.1 (δηλ. μεθέθους C2).



Σχήμα Ε.7: Παράδειγμα αυτοσυνεπούς μονοπαραμετρικής πρόγνωσης CME από την πρόγνωση μιας έκλαμψης. (Αριστερά) η πιθανότητα εκδήλωσης έκλαμψης διαφόρων μεθεθών συναρτήσει της τιμής της παραμέτρου. (Δεξιά) η πιθανότητα συσχέτισης μιας CME για διάφορα μεγέθη εκλάμψεων. Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται στην υπηρεσία πρόγνωσης γεγονότων SEP FORSPEF του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών (Anastasiadis, Papaioannou, Sandberg et al., 2017).

- (β) Κάνουμε το ίδιο για CME σχετιζόμενη με γεγονός SEP και γραμμική ταχύτητα κατά το δυνατό κοντά στο κατώτερο όριο της παρ. 4.2 (δηλ. ταχύτητας 800 km/s).
- (γ) Επιλέγουμε το περισσότερο συντηρητικό, δηλ. ανατολικότερο, ηλιογραφικό μήκος σύμφωνα με το Σχ. Ε.4 και τη σχετική συζήτηση.
- (δ) Πάμε ανατολικότερα αυτού του μεσημβρινού και βρίσκουμε την ηλιακή έκρηξη με την αμέσως μεγαλύτερη έκλαμψη από την έκλαμψη που όρισε τον μεσημβρινό του βήματος (α) και την ηλιακή έκρηξη με CME ταχύτητας αμέσως παραπάνω από αυτή που όρισε τον μεσημβρινό του βήματος (β). Σαφές είναι ότι μπορεί να πρόκειται για δύο διαφορετικές εκρήξεις.
- (ε) Από το ανατολικό χείλος του ηλιακού δίσκου ως το ηλιογραφικό μήκος του βήματος (γ) δηλώνουμε “Όλα Καθαρά” όταν υπάρχει χαμηλή πιθανότητα (ή δυαδικό OXI, για δυαδική πρόγνωση) εκδήλωσης έκλαμψης μεγέθους ίσου με αυτό του βήματος (δ) και εκτιμώμενης ταχύτητας της CME μικρότερης από αυτή του βήματος (δ).
- (στ) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του βήματος (ε) για την ενδιάμεση ζώνη ηλιογραφικού μήκους που ορίζεται από το μήκος του βήματος (α) και το μήκος του βήματος (β). Γι αυτή τη ζώνη, δηλώνουμε “Όλα Καθαρά” όταν υπάρχει χαμηλή πιθανότητα (ή δυαδικό OXI) εκδήλωσης έκλαμψης μεγέθους αμέσως παραπάνω από το κατώτατο όριο του βήματος (α) και εκτιμώμενη ταχύτητα της CME χαμηλότερη από την αμέσως μεγαλύτερη ταχύτητα αυτής του βήματος (β).
- (ζ) Για τη ζώνη ηλιογραφικού μήκους που ορίζεται από τον δυτικότερο μεσημβρινό των παραπάνω βημάτων ως και το δυτικό χείλος του Ήλιου, δηλώνουμε “Όλα Καθαρά” όταν υπάρχει χαμηλή πιθανότητα (ή δυαδικό OXI) εκδήλωσης έκλαμψης μεγέθους C2 και εκτιμώμενη ταχύτητα της CME χαμηλότερη από 800 km/s .



Σχήμα Ε'8: Ηλιογραφικές συντεταγμένες των κέντρων δράσης που έδωσαν ηλιακές εκρήξεις σχετιζόμενες με γεγονότα SEP στο γεωδιάστημα, δοσμένες σε καρτεσιανή γεωμετρία. Ορίζονται τρεις ζώνες ηλιογραφικού μήκους από διακεκομμένες γραμμές στις -52° και -12° . Κάθε ζώνη ηλιογραφικού μήκους, πλην της δυτικότερης για την οποία τα όρια είναι γνωστά (εκλάμψεις μεγέθους C2, CMEs με γραμμική ταχύτητα 800 km/s) περιέχουν τις εκρήξεις αναφοράς για τον ορισμό του “Όλα Καθαρά”. Οι δύο εστιγμένες γραμμές δηλώνουν το ανατολικό και το δυτικό χείλος του Ήλιου, ενώ οι δύο συνεχείς γραμμές τον ηλιακό ισημερινό και τον πρώτο μεσημβινό. Τα χρώματα στα σύμβολα δηλώνουν κατηγορία έκλαμψης (C με πράσινο, M με πορτοκαλί, X με κόκκινο).

Η απτή εφαρμογή όλων των παραπάνω βημάτων δίνεται στο Σχ. Ε'8. Με βάση αυτό και τα δεδομένα SEP γεγονότων των δύο τελευταίων ηλιακών κύκλων προκύπτουν οι ζώνες ηλιογραφικού πλάτους $(-90, -52)^\circ$, $(-52, -12)^\circ$ και $(-12, +90)^\circ$. Τα αντίστοιχα όρια για το “Όλα Καθαρά” σε αυτές τις ζώνες είναι:

- Ανατολικότερη $(-90, -52)^\circ$: “Όλα Καθαρά” για χαμηλή πιθανότητα ή δυαδικό OXI έκλαμψης μεγέθους M3 και CME εκτιμώμενης γραμμικής ταχύτητας $< 1300 \text{ km/s}$.
- Ενδιάμεση $(-52, -12)^\circ$: “Όλα Καθαρά” για χαμηλή πιθανότητα ή δυαδικό OXI έκλαμψης μεγέθους C2 και CME εκτιμώμενης γραμμικής ταχύτητας $< 1100 \text{ km/s}$.
- Δυτικότερη $(-12, +90)^\circ$: “Όλα Καθαρά” για χαμηλή πιθανότητα ή δυαδικό OXI έκλαμψης μεγέθους C2 και CME εκτιμώμενης γραμμικής ταχύτητας $< 800 \text{ km/s}$.

Ε'4.4 Ευέλικτο επίπεδο

Η μεθοδολογία των παρ. 4.1 - 4.3 βασίστηκε στο βασικό κατώφλι της NOAA για τα γεγονότα SEP, δηλ. το μέγεθος S1. Ανάλογη ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί για κάθε μέγεθος γεγονότος SEP αρκεί να υπάρχει κατάλληλη στατιστική πάνω στην οποία να βασιστεί το “Όλα Καθαρά”.

Το παραπάνω μέγεθος θα μπορούσε να αφορά στη μέγιστη ροή πρωτονίων των SEP γεγονότων ανά διαφορετικά ενεργειακά κανάλια, διαφορικά (differential) ή σωρευτικά (cumulative)· λόγου χάρη, > 30 MeV, > 50 MeV, > 100 MeV κοκ. Τέτοιες κατηγοριοποιήσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη προστασία βιολογικών συστημάτων εκτός ατμόσφαιρας, με πρώτο και κυριότερο το ανθρώπινο σώμα (π.χ., Mertens and Slaba (2019)). Πέραν της μέγιστης ροής, όμως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ο συνολικός πληθυσμός των πρωτονίων (δηλ. το ολοκλήρωμα της χρονοσειράς της ροής πρωτονίων), η μέγιστη διάρκεια ή ο χρόνος κλιμάκωσης, από την αρχή στο μέγιστο, για γεγονότα SEPs σε διαφορετικά ενεργειακά κανάλια. Μια ενδιαφέρουσα και ενδεχομένως πολλά υποσχόμενη πρακτική, η αξία της οποίας μένει να καταδειχτεί, είναι η αποτελεσματική μοντελοποίηση των παραμέτρων αυτών με συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις του ηλιογραφικού μήκους (Kahler, White and Ling, 2017; Kahler and Ling, 2018).

Ε'4.5 Επέκταση πρόγνωσης σε ολόκληρο τον ηλιακό δίσκο

Σε αυτή την ενδεικτική μελέτη εξετάσαμε την πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” για την περίπτωση μεμονομένων κέντρων δράσης στον Ήλιο. Το τελικό αποτέλεσμα, όμως, θα πρέπει να είναι η πιθανότητα ή ένα δυαδικό NAI/OXI για το “Όλα Καθαρά” για ολόκληρο τον ηλιακό δίσκο, δηλαδή το ορατό προς τη Γη ηλιακό ημισφαίριο. Είναι απολύτως πιθανό, ειδικά σε περιόδους ηλιακού μεγίστου, αυτό το ημισφαίριο να περιέχει πολλά κέντρα δράσης.

Για να προχωρήσουμε από μεμονωμένα κέντρα δράσης σε ολόκληρο τον ηλιακό δίσκο, θα πρέπει να επιτύχουμε μια ενσωμάτωση (aggregation) όλων των επιμέρους δυαδικών αποτελεσμάτων ή πιθανοτήτων σε ένα ολικό δυαδικό αποτέλεσμα ή μια ολική πιθανότητα. Στην περίπτωση δυαδικής πρόγνωσης ακολουθίας κέντρων δράσης με αποτελέσματα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$, όπου $\Delta_i \equiv \{0, 1\}$, $i \equiv \{1, 2, \dots, N\}$, όπου 0 σημαίνει OXI “Όλα Καθαρά” και 1 σημαίνει NAI “Όλα Καθαρά”, η ύπαρξη ενός και μόνο 0 στην ακολουθία σημαίνει ότι το ολικό αποτέλεσμα Δ_{tot} για ολόκληρο τον ηλιακό δίσκο είναι $\Delta_{tot} = 0$ (OXI). Αν $\Delta_i = 1$ για κάθε $i \equiv \{1, 2, \dots, N\}$, τότε $\Delta_{tot} = 1$ (NAI).

Στην περίπτωση πιθανολογικής πρόγνωσης του “Όλα Καθαρά”, σε κάθε κέντρο δράσης αντιστοιχεί μια πιθανότητα P_i όπου $P_i \in [0, 1]$ για κάθε $i \equiv \{1, 2, \dots, N\}$. Τότε ο ολική πιθανότητα P_{tot} για ολόκληρο το δίσκο δίνεται από την εξίσωση της στατιστικής ενσωμάτωσης πιθανοτήτων

$$P_{tot} = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P_i)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση, θα πρέπει να οριστεί ένα κατώφλι της τιμής P_{tot} , πάνω από το οποίο η πιθανότητα για “Όλα Καθαρά” είναι σημαντική και θα μεταφράζεται ως NAI, ενώ κάτω από το οποίο η πιθανότητα είναι μικρή και θα μεταφράζεται ως OXI. Το ποιο είναι αυτό το κατώφλι καθορίζεται από το πόσο συντηρητική επιθυμούμε να

είναι η πρόγνωση, με μια 'απλοϊκή' τιμή αναφοράς την πιθανότητα 0.5. Σε αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα $P_{tot} > 0.5$ μεταφράζεται σε ΝΑΙ "Όλα Καθαρά", ενώ το αποτέλεσμα $P_{tot} \leq 0.5$ μεταφράζεται σε ΟΧΙ "Όλα Καθαρά".

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια πειραματική πρόγνωση του "Όλα Καθαρά" με χρήση πιθανολογικής μεθόδου και στατιστική ενσωμάτωση η οποία στηρίζεται στο συνδυασμό των βασικών Υποεπιπέδων 1 και 2 (παρ. 4.1 και 4.2, αντίστοιχα) χωρίς όμως την πληροφορία του ηλιογραφικού μήκους λειτουργεί ήδη στο Εργαστήριο Εξόρυξης Δεδομένων του Πολιτειακού Πανεπιστημίου της Georgia (Ji, Aydin, Georgoulis et al., 2020) και είναι προσβάσιμη μέσω διεπιφάνειας API (Application Programming Interface), παρέχοντας τα αποτελέσματά της στη βάση δεδομένων SEP Scoreboard του Κέντρου Community Coordinated Modeling Center (CCMC) της NASA. Πληροφορίες και αποτελέσματα μπορούν να αντληθούν εδώ: <https://dmlab.cs.gsu.edu/sep-prediction/>.

Παράλληλα, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι υπάρχουν και μεθοδολογίες υπό μελέτη στις οποίες επιδιώκεται η πρόγνωση του "Όλα Καθαρά", ή και αυτή καθαυτή η πρόγνωση γεγονότων SEP στο γεωδιάστημα, απευθείας σε ολόκληρο τον ηλιακό δίσκο, δηλ. χωρίς στατιστική ενσωμάτωση ή ακολουθία δυαδικών προγνώσεων επιμέρους κέντρων δράσης. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού επιστρατεύονται μέθοδοι μηχανικής μάθησης (Sadykov, Kosovichev, Kitiashvili et al., 2021; Ji, Arya, Kempton et al., 2022), η αύξηση της χρήσης των οποίων σε εφαρμογές πρόγνωσης του διαστημικού καιρού είναι εκρηκτική. Τα αποτελέσματα αυτών των μεθόδων και η πρακτική τους σημασία μένουν να φανούν και είναι υπό συστηματική διερεύνηση.

Ε.5 Συζήτηση και συμπεράσματα

Σε αυτό το άρθρο περιγράψαμε αδρομερώς το ανοικτό πρόβλημα του "Όλα Καθαρά" στην πρόγνωση γεγονότων SEP στο γεωδιάστημα, προερχόμενων από ηλιακές εκρήξεις. Αναφέραμε ότι το πρόβλημα του "Όλα Καθαρά" είναι τουλάχιστον ίσης σημασίας –και δυσκολίας– με το πρόβλημα της πρόγνωσης αυτών καθαυτών των γεγονότων SEP.

Κάποιες από τις δυσκολίες εδράζονται στο ότι ο ορισμός του "Όλα Καθαρά" δεν είναι μοναδικός, αλλά εξαρτάται από τις ανάγκες και τις επιδιώξεις αυτού που τον χρειάζεται. Αυτές απορρέουν από τα συγκεκριμένα και πολλαπλά χαρακτηριστικά των γεγονότων SEP, όπως είναι η μέγιστη ροή, ο συνολικός αριθμός πρωτονίων, ο χρόνος κλιμάκωσης, η συνολική διάρκεια, κτλ., με καθένα από αυτά να έχει διαφορετικές τιμές για διαφορετικά ενεργειακά κανάλια, διαφορικά ή σωρευτικά. Με δεδομένη τη βούληση οργανισμών όπως ο ESA και η NOAA ή φορέων όπως τα SRAG και CCMC της NASA, τα οποία επιδιώκουν πρόγνωση γεγονότων SEPs και τα αντίστοιχα "Όλα Καθαρά" για διάφορες περιοχές ενέργειας, γίνεται σαφές ότι μια ολοκληρωμένη πρόγνωση του "Όλα Καθαρά" αφορά σε ένα φάσμα προγνώσεων "Όλα Καθαρά" για κάθε επιμέρους κατηγορία. Είμαστε μακριά από το ένα τέτοιο σημείο προόδου αυτή τη στιγμή, μόλις λίγα χρόνια πριν από σχεδιαζόμενες επανδρωμένες αποστολές στη Σελήνη, τις πρώτες μετά το 1972.

Οι προτάσεις μας, τόσο σε αυτή τη μελέτη όσο και σε καθαρά διερευνητικό επίπεδο, είναι οι εξής:

- Οι πρώτες προσπάθειες να γίνουν με την καλύτερη δυνατή στατιστική, δηλ.

ξεκινώντας από τον ελάχιστο ορισμό ενός γεγονότος SEP από τη NOAA, δηλ. το μέγεθος S1 (10 pfu για ενέργεια > 10 MeV). Έχοντας κατανοήσει τα αποτελέσματα της διερεύνησης με την καλύτερη δυνατή στατιστική, μπορούμε στη συνέχεια να επεκταθούμε σε πιο απαιτητικούς ορισμούς των γεγονότων SEP με αυτοσυνεπή επέκταση της μεθοδολογίας.

- Δεν μπορεί να είναι εφικτή η αποτελεσματική πρόγνωση του “Όλα Καθαρά” αν δεν επικεντρωθούμε στα μητρικά φαινόμενα των γεγονότων SEP, δηλ. στις ηλιακές εκρήξεις που τα προκαλούν. Αυτή η ολιστική αντιμετώπιση κατά μήκος της νοητής γραμμής Ηλίου - Γης δίνει ενισχυμένες αβεβαιότητες λόγω της επικάλυψης πολλών μετρούμενων μεγεθών, το καθένα με τις δικές του επιμέρους αβεβαιότητες, είναι όμως ο μόνος τρόπος για την αποτελεσματική αντιμετώπιση του μικρού, μη πρακτικού χρόνου πρόγνωσης (λεπτά ή δεκάδες λεπτών) ο οποίος προκύπτει από μεθόδους που βασίζονται σε παρατηρήσεις γεγονότων ηλεκτρονίων στην εσωτερική ηλιόσφαιρα, σχετικά μακριά από τον Ήλιο (π.χ., (Posner, 2007)). Επιπλέον, ο προτεινόμενος μηχανισμός είναι αυτοσυνεπής από φυσικής άποψης, δίνοντάς μας τη δυνατότητα ενίσχυσης της φυσικής κατανόησης πέραν από την ανάγκη της επιχειρησιακής πρόγνωσης.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι με αυτή την προσέγγιση αποφεύγονται θεμελιώδη προβλήματα, όπως τα παρακάτω:

- Η στατιστική γίνεται σημαντικά φτωχότερη όσο πιο απαιτητικός γίνεται ο ορισμός των SEP γεγονότων που μας ενδιαφέρουν. Αναφέραμε ήδη ότι λόγω της σχετικά λεπτομερούς κατευθυντικότητας των γεγονότων αυτών, δεκάδες χιλιάδες παρατηρούμενες εκλάμψεις και CMEs δίνουν λαβή μόνο σε μερικές εκατοντάδες γεγονότα SEP σε δεδομένο σημείο της ηλιόσφαιρας. Από κάποιο σημείο ενεργειακού κατωφλίου και μετά γίνεται σαφές ότι η στατιστική θα είναι απολύτως ανεπαρκής, τόσο για την πρόγνωση των γεγονότων όσο και του “Όλα Καθαρά”. Σε τέτοιες περιπτώσεις ενδεχομένως να κινηθούμε στη χρήση θεωριών όπως αυτή των ακραίων τιμών (extreme value theory) με κάποιες εφαρμογές στην πρόγνωση του ηλιακού ανέμου (Larrodera, Nikitina and Cid, 2021) ή στις μεγαλύτερες ηλιακές εκλάμψεις (Griffiths, Fawcett and Green, 2022) να έχουν ήδη υλοποιηθεί. Είναι επίσης σαφές ότι η επιδεινούμενη στατιστική θα πλήξει και την εφαρμογή μεθόδων μηχανικής μάθησης –και κυρίως βαθείας μάθησης– οι οποίες στηρίζονται σε εύρωστες και ισοσκελισμένες κατανομές γεγονότων (θετικό δείγμα) – μη γεγονότων (αρνητικό δείγμα) (π.χ., Ahmadzadeh, Aydin, Georgoulis et al. (2021)), εκτός και αν κινηθούμε προς την κατεύθυνση συνθετικών μεταδεδομένων (synthetic metadata), η αξία των οποίων μένει να φανεί.
- Η ποιότητα των φωτοσφαιρικών μεταδεδομένων των κέντρων δράσης που απαιτούνται για την εξαγωγή πιθανοτήτων επιδεινώνεται σταδιακά για ηλιογραφικές θέσεις των κέντρων δράσης που βρίσκονται μακριά από τον πρώτο ηλιακό μεσημβρινό. Αυτό οφείλεται σε φαινόμενα προβολής (projection effects) και, επιπλέον, σε φαινόμενα προβράχυνσης (foreshortening) κοντά στο ανατολικό και δυτικό χείλος λόγω της σφαιρικότητας του Ήλιου και της οπτικά λεπτής ατμόσφαιρας πάνω από τη φωτόσφαιρα. Τα φαινόμενα προβολής αντιμετωπίζονται σε προσέγγιση πρώτης τάξης αν ολόκληρο το διάνυσμα του φωτοσφαιρικού μαγνητικού πεδίου είναι μετρήσιμο (Gary and Hagyard, 1990), όμως

πέρα από τις $\pm 70^\circ$ ηλιογραφικό μήκος τα φαινόμενα καμπυλότητας δεύτερης τάξης και απώλειας πληροφορίας λόγω προβράχυνσης γίνονται ιδιαίτερα σημαντικά. Επιπλέον, ο βασικός μαγνητογράφος που έχουμε στη διάθεσή μας σήμερα, ο Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) της αποστολής Solar Dynamics Observatory (SDO) δίνει μη χρηστικές τιμές πέρα από τις $\pm 70^\circ$ (Hoeksema, Liu, Hayashi et al., 2014; Bobra, Sun, Hoeksema et al., 2014). Αυτό αφαιρεί τη δυνατότητα άμεσης πρόγνωσης κοντά στα χείλη του Ήλιου με αποτέλεσμα να είναι υπό μελέτη έμμεσοι τρόποι (π.χ., παρέκταση των χρονοσειρών μεταδεδομένων), παράλληλα με την αντιμετώπιση ολόκληρου του δίσκου με χρήση μεθόδων μηχανικής μάθησης.

- Γεγονότα SEPs στο γεωδιάστημα ανιχνεύονται ακόμα και από ηλιακές εκρήξεις που σημειώνονται στο 'μακρινό' ηλιακό ημισφαίριο, το μη ορατό από τη Γη. Αυτά μπορεί να είναι και ιδιαίτερα οξεία, ειδικά αν το εκρηκτικό κέντρο δράσης βρίσκεται λίγο μετά το δυτικό ηλιακό χείλος, όπως αυτό φαίνεται από τη Γη (Σχ. Ε'4). Η πρόγνωση του "Όλα Καθαρά" σε τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι εφικτή παρά μόνο έμμεσα και με αμφίβολα αποτελέσματα. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί στο μέλλον με μακρόπνοα σχέδια για την τοποθέτηση τηλεσκοπίων πέραν της γραμμής Γης-Ήλιου και συγκεκριμένα στα σημεία Lagrange L5 για τα κέντρα δράσης που ετοιμάζονται να διασχίσουν το ανατολικό χείλος (Vourlidas, 2015) και L4 για αυτά που έχουν διασχίσει το δυτικό χείλος (Posner, Arge, Staub et al., 2021). Με βάση τις τελευταίες εξελίξεις, η ηλιοφυσική κοινότητα κινείται σε λογικές '4π' στερεοσκοπικής παρατήρησης ολόκληρου του Ήλιου⁵ από διαστημόπλοια τα οποία θα δρουν είτε ως αδρανειακοί, είτε ως μη αδρανειακοί, παρατηρητές σε σχέση με τη Γη.

Η παραπάνω συζήτηση καταδεικνύει αφενός τη δυσκολία και αφετέρου την επεξεργασμένη φύση των προβλημάτων που άπτονται όχι μόνο της πρόγνωσης του "Όλα Καθαρά" για τα SEP γεγονότα αλλά και της πρόγνωσης όλων των φαινομένων του από τον Ήλιο προερχόμενου διαστημικού καιρού. Εξίσου δεδομένη είναι όμως και η βούλησή μας για τη συνέχιση της ρομποτικής ή και της επανδρωμένης εξερεύνησης του διαστήματος, συνεπώς ο διαστημικός καιρός θα συνεχίσει να μελετάται ενδελεχώς με διττό σκοπό: την κατανόηση, αφενός, και την επιχειρησιακή πρόγνωση, αφετέρου.

Σε αυτή την περίληψη αναφέρθηκα εκτενώς σε αποτελέσματα των προγραμμάτων FLARECAST της Ευρωπαϊκής Επιτροπής (Grant Agreement No. 640216), A-EFFort του Ευρωπαϊκού Οργανισμού Διαστήματος (ESA, Subcontract Ref. 68704/54.61/SWESNET-33-AOA-RCAAM), Elements: Comprehensive Time Series Data Analysis for the Prediction of Solar Flares and Eruptions του Αμερικανικού Εθνικού Ιδρύματος Υποτροφιών (NSF, Award No. 1931555) και Development of Machine Learning Dataset and Capabilities for Solar Energetic Particle Event Forecasting: Phases I, II ανάμεσα σε NASA/SRAG και GSU/DMLab. Ευχαριστώ ιδιαίτερα το Τμήμα Φυσικής & Αστρονομίας του Πολιτειακού Πανεπιστημίου της Georgia στην Atlanta των ΗΠΑ (GSU) για την τιμητική επιλογή μου στη θέση του Επισκέπτη Καθηγητή στο Πρόγραμμα Νέα Γενιά (Next Generation Visiting Research Professor) για το διάστημα

⁵<https://science.nasa.gov/science-red/s3fs-public/atoms/files/HMCS%20PreStudy%20Report--4PI.pdf>

Σεπτέμβριος 2018 – Ιούνιος 2020, αλλά και το Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Φυσικής του Πανεπιστημίου John Hopkins (The John Hopkins University Applied Physics Laboratory) στο Maryland των ΗΠΑ για τη συμμετοχή μου στην ομάδα μελέτης και σχεδιασμού (mission concept study team) της μελλοντικής αποστολής ‘4π’ της NASA. Τέλος, είμαι ευγνώμων στο προσωπικό και τους φοιτητές του Εργαστηρίου Εξόρυξης Δεδομένων (DMLab) του GSU, για τη φιλοξενία, την εκτίμηση και την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλαν και με περιβάλλουν, ως εξωτερικό πλέον Συμβουλευτικό Μέλος του Εργαστηρίου.

Αναφορές

- Ahmadzadeh A., Aydin B., Georgoulis M.K. et al., 2021, APJS, 254 (2), 23.
- Aminalragia-Giamini S., Jiggins P., Anastasiadis A. et al., 2020, J. Space Weather Space Clim., 10, 1.
- Anastasiadis A., Papaioannou A., Sandberg I. et al., 2017, Sol. Phys., 292 (9), 134.
- Barnes G., Leka K.D., Schrijver C.J. et al., 2016, Astrophys. J., 829 (2), 89.
- Bobra M.G. and Ilonidis S., 2016, Astrophys. J., 821 (2), 127.
- Bobra M.G., Sun X., Hoeksema J.T. et al., 2014, Sol. Physics, 289 (9), 3549.
- Bruzek A., 1972, in Solar-Terrestrial Physics/1970, Springer Netherlands, 49–60, DOI 10.1007/978-94-010-3126-4 5
- Cane H.V., Reames D.V. and von Rosenvinge T.T., 1988, J. Geophys. R., 93 (A9), 9555.
- Desai M.I. and Burgess D., 2008, J. Geophys. Res. Space Phys., 113 (A9), A00B06.
- Engell A.J., Falconer D.A., Schuh M., Loomis J. and Bissett D., 2017, Space Weather, 15 (10), 1321.
- Falconer D., Barghouty A.F., Khazanov I. and Moore R., 2011, Space Weather, 9 (4), S04003.
- Falconer D.A., Moore R.L., Barghouty A.F. and Khazanov I., 2014, Space Weather, 12 (5), 306.
- Gary G.A. and Hagyard M.J., 1990, Sol. Phys., 126, 21.
- Georgoulis M.K., 2008, Geophys. Res. Lett., 35 (6), L06S02.
- Georgoulis M.K., Bloomfield D.S., Piana M. et al., 2021, J. Space Weather Space Clim., 11, 39.
- Georgoulis M.K., Papaioannou A., Sandberg I. et al., 2018, J. Space Weather Space Clim., 8, A40.
- Griffiths B., Fawcett L. and Green A.C., 2022, Space Weather, 20 (3).

- Harvey K.L. and Zwaan C., 1993, *Sol. Phys.*, 148 (1), 85.
- Hoeksema J.T., Liu Y., Hayashi K. et al., 2014, *Sol. Phys.*, 289 (9), 3483.
- Ji A., Arya A., Kempton D. et al., 2022, in 2021 IEEE Conference on Cognitive Machine Intelligence, in press.
- Ji A., Aydin B., Georgoulis M.K. and Angryk R., 2020, in 2020 IEEE International Conference on Big Data (Big Data), 4218–4225.
- Kahler S.W. and Ling A.G., 2018, *J. Space Weather Space Clim.*, 8, A47.
- Kahler S.W., White S.M. and Ling A.G., 2017, *J. Space Weather Space Clim.*, 7, A27.
- Kontogiannis I., Georgoulis M.K., Guerra J.A., Park S.H. and Bloomfield D.S., 2019, *Sol. Phys.*, 294 (9), 130.
- Lario D. and Simnett G.M., 2004, in *Solar Variability and its Effects on Climate. Geophysical Monograph 141*, volume 141, 195.
- Larrodera C., Nikitina L. and Cid C., 2021, *Space Weather*, 19 (12).
- Leka K. and Barnes G., 2018, in *Extreme Events in Geospace*, Elsevier, 65–98, ISBN: 9780128127001.
- Leka K.D., Park S.H., Kusano K. et al., 2019a, *Astrophys. J. Suppl. Series*, 243 (2), 36.
- Leka K.D., Park S.H., Kusano K. et al., 2019b, *Astrophys. J.*, 881 (2), 101.
- McComas D.J., Elliott H.A., Gosling J.T. et al., 2002, *Geophys. Res. Lett.*, 29 (9), 1290.
- McComas D.J., Elliott H.A., Schwadron N.A. et al., 2003, *Geophys. Res. Lett.*, 30 (10), 1517.
- Mertens C.J. and Slaba T.C., 2019, *Space Weather*, 17 (12), 1650.
- Murray S.A., Guerra J.A., Zucca P. et al., 2018, *Sol. Phys.*, 293 (4), 60.
- Núñez M., 2011, *Space Weather*, 9 (7), 28.
- Papaioannou A., Sandberg I., Anastasiadis A. et al., 2016, *J. Space Weather Space Clim.*, 6, A42.
- Park S.H., Leka K.D., Kusano K. et al., 2020, *Astrophys. J.*, 890 (2), 124.
- Parker E.N., 1958, *Astrophys. J.*, 128, 664.
- Parker E.N., 1972, *Astrophys. J.*, 174, 499.
- Parker E.N., 1983, *Astrophys. J.*, 264, 642.
- Posner A., 2007, *Space Weather*, 5 (5), S05001.
- Posner A., Arge C.N., Staub J. et al., 2021, *Space Weather*, 19 (9).

- Priest E.R., 1982, Solar Magnetohydrodynamics, Springer Netherlands.
- Reames D.V., 2020, Space Sci. Rev., 216 (2).
- Sadykov V., Kosovichev A., Kitiashvili I. et al., 2021, Prediction of solar proton events with machine learning: Comparison with operational forecasts and "all-clear" perspectives, 10.48550/ARXIV.2107.03911
- Sheeley N.R., Walters J.H., Wang Y.M. and Howard R.A., 1999, J. Geophys. Res. Space Phys., 104 (A11), 24739.
- van Driel-Gesztelyi L. and Green L.M., 2015, Living Rev. Sol. Phys., 12 (1).
- Vourlidas A., 2015, Space Weather, 13 (4), 197.
- Webb D.F. and Howard T.A., 2012, Living Rev. Sol. Phys., 9.
- Wiegmann T., Thalmann J.K. and Solanki S.K., 2014, Astron. Astrophys. Rev., 22 (1).
- Yashiro S., Gopalswamy N., Akiyama S., Michalek G. and Howard R.A., 2005, J. Geophys. Res. Space Phys., 110 (A12), A12S05.

ΣΤ' Μελέτη του λόγου εντάσεων σε περιοχή στεμματικής οπής

Μυρτώ Κωλέττη (ΕΚΠΑ/ΚΕΑΕΜ)⁶ και Κωνσταντίνος Γοντικάκης

ΣΤ.1 Εισαγωγή

Η ηλιακή ατμόσφαιρα, το τμήμα του Ήλιου το οποίο μπορεί να παρατηρηθεί μέσω ακτινοβολίας, αποτελείται από την φωτόσφαιρα, τη χρωμόσφαιρα, τη μεταβατική περιοχή (transition region) και το στέμμα. Η ανώτερη ατμόσφαιρα, δηλαδή η περιοχή πάνω από την φωτόσφαιρα, χαρακτηρίζεται από απότομη πτώση της πυκνότητας και αύξηση της θερμοκρασίας σε σχέση με το υποκείμενα στρώματα (Koskinen and Vainio (2009)). Η θερμοκρασία αυξάνεται σταδιακά στην χρωμόσφαιρα και απότομα στην μεταβατική περιοχή από $2-4 \times 10^4$ στα $\sim 10^6$ K, φτάνοντας πάνω από 10^6 K στο στέμμα Priest (2014). Αυτές οι υψηλές θερμοκρασίες επιτρέπουν την ύπαρξη ιονισμένων ατόμων με μεγάλο βαθμό ιονισμού, τα οποία παράγουν γραμμές εκπομπής που παρατηρούνται στο μακρινό (FUV, 1200Å-2000Å) και ακραίο υπεριώδες (Tian, Harra, Baker et al., 2021) (EUV, 100Å-1200Å⁷), καθώς και στις ακτίνες X (0.3 Å-30Å⁸), κυρίως στο στέμμα (Priest, 2014).

Η ηλιακή ατμόσφαιρα κυριαρχείται από έντονες δυναμικές κινήσεις του πλάσματος. Αυτές οι εκροές πλάσματος αποτελούν σημαντικό πεδίο έρευνας, καθώς συμβάλλουν στην βαθύτερη κατανόηση των μηχανισμών μεταφοράς ενέργειας και μάζας από τα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας προς το στέμμα, που με τη σειρά τους θεωρείται ότι συνδέονται με τη θέρμανση του στέμματος (Tian, Harra, Baker et al., 2021). Πιο συγκεκριμένα, ανοδικές κινήσεις πλάσματος που παρατηρούνται σε στεμματικές οπές και σε κέντρα δράσης (active regions) έχουν συνδεθεί με τον ηλιακό άνεμο. Οι παρατηρήσεις υποδεικνύουν πως ο αργός ηλιακός άνεμος προέρχεται από την περιφέρεια των κέντρων δράσης, ενώ ο γρήγορος ηλιακός άνεμος από τις στεμματικές οπές (Αλυσανδράκης, Νίντος και Πατσουράκος, 2015).

Οι στεμματικές οπές (coronal holes) είναι περιοχές μεγάλης επιστημονικής σημασίας. Αποτελούν μεγάλης κλίμακας δομές του στέμματος, που παρατηρούνται ως σκοτεινές περιοχές στο λευκό φως, αλλά και σε φασματικές γραμμές του ακραίου υπεριώδους και των ακτίνων X που σχηματίζονται σε θερμοκρασίες του στέμματος (Krieger, Timothy and Roelof, 1973). Οι ανοιχτές δυναμικές γραμμές που εξέρχονται από τις στεμματικές οπές επιτρέπουν την εκροή πλάσματος, συνιστώντας τον γρήγορο ηλιακό άνεμο (Harra, 2012). Τα φυσικά χαρακτηριστικά των στεμματικών οπών, όπως η χαμηλή τους πυκνότητα (Krieger, Timothy and Roelof, 1973), καθώς και οι φασματοσκοπικές παρατηρήσεις στα μήκη κύματος FUV και EUV επιβεβαιώνουν την θεώρηση αυτή. Συγκεκριμένα, φασματικές γραμμές που σχηματίζονται στην μεταβατική περιοχή και το στέμμα εμφανίζουν μετατοπίσεις Doppler προς το κυανό σε στεμματικές οπές, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι στις περιοχές αυτές υπάρ-

⁶Η κ. Κωλέττη είναι υποψήφια διδάκτωρ στο ΕΚΠΑ από το 2021 και εκπονεί τη διατριβή της στο ΚΕΑΕΜ (επιβλέπων: Κ. Γοντικάκης).

⁷<https://www.swpc.noaa.gov/phenomena/solar-euv-irradiance>

⁸https://science.nasa.gov/ems/11_xrays

χουν συστηματικές ανοδικές κινήσεις (Raju, 2009; Hassler, Dammasch, Lemaire et al., 1999).

Σημαντικό εργαλείο μελέτης των φυσικών χαρακτηριστικών του ηλιακού πλάσματος αποτελεί ο λόγος εντάσεων μεταξύ δύο φασματικών γραμμών. Λόγω της χαμηλής της πυκνότητας, η ανώτερη ατμόσφαιρα μπορεί να θεωρηθεί οπτικά διαφανής στα μήκη κύματος FUV και EUV (Zanna and Mason, 2018a) και ο λόγος εντάσεων δύο φασματικών γραμμών που προέρχονται από το ίδιο ανώτερο ενεργειακό επίπεδο ισούται με τον λόγο των πιθανοτήτων μετάβασης. Σύμφωνα με την (Jordan, 1967), απόκλιση από αυτό το μοτίβο υποδεικνύει μεταβολές στο οπτικό πάχος.

Σε αρκετές μελέτες ερευνάται ο λόγος I_{1394}/I_{1403} των εντάσεων των λαμπρών γραμμών εκπομπής της μεταβατικής ζώνης Si IV 1393.755 Å και Si IV 1402.770 Å ($3s^2S_{1/2} - 3p^2P_{3/2} / 3s^2S_{1/2} - 3p^2P_{1/2}$ Zanna and Mason (2018a)) με θερμοκρασία σχηματισμού $T \sim 7.5 \times 10^4$ K, σε διάφορες περιοχές του Ήλιου. Οι γραμμές αυτές μοιράζονται το ίδιο χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο (ground level) και ο λόγος τους αναμένεται να είναι ίσος με 2 σε συνθήκες όπου το πλάσμα είναι οπτικά διαφανές.

Ενδεικτικά, οι Gontikakis and Vial (2018) βρήκαν ότι στην περιφέρεια ενός κέντρο δράσης υπάρχουν περιοχές με τιμές του I_{1394}/I_{1403} χαμηλότερες του 2, το οποίο υποδεικνύει πως η οπτική αδιαφάνεια παύει να είναι αμελητέα. Οι τιμές που ξεπερνούν το 2 αποδίδονται στη σκέδαση συντονισμού (resonant scattering), φαινόμενο κατά το οποίο η φασματική γραμμή παράγεται όταν ιόντα πυριτίου απορροφούν φωτόνια ίδιας ενέργειας και τα επανεκπέμπουν στην κατεύθυνση της γραμμής παρατήρησης (Phillips, Feldman and Landi (2008)).

Οι Tripathi, Nived, Isobe et al. (2020) μελετώντας την χρονική εξέλιξη του λόγου εντάσεων σε μια αναδυόμενη ενεργό περιοχή, βρήκαν ότι στα πρώτα στάδια της εξέλιξης ο λόγος I_{1394}/I_{1403} αποκλίνει από το 2, καθώς πυκνό χρωμοσφαιρικό πλάσμα ανέρχεται στο στέμμα μέσω αναδυόμενων βρόχων. Στατιστικά, λόγοι μικρότεροι του 2 συναντώνται στην περιφέρεια της περιοχής, ενώ λόγοι μεγαλύτεροι του 2 στον πυρήνα της, που αποδίδεται σε οπτική αδιαφάνεια σε συνθήκες όπου η παρατήρηση συμβαίνει υπο κλίση ως προς την επιφάνεια της δομής. Παρατηρούν ότι τα σημεία που έχουν λόγους μεγαλύτερους του 2 βρίσκονται στατιστικά πιο κοντά σε περιοχές μεγάλης λαμπρότητας.

ΣΤ.2 Επεξεργασία Δεδομένων

ΣΤ.2.1 Όργανα και περιοχή παρατήρησης

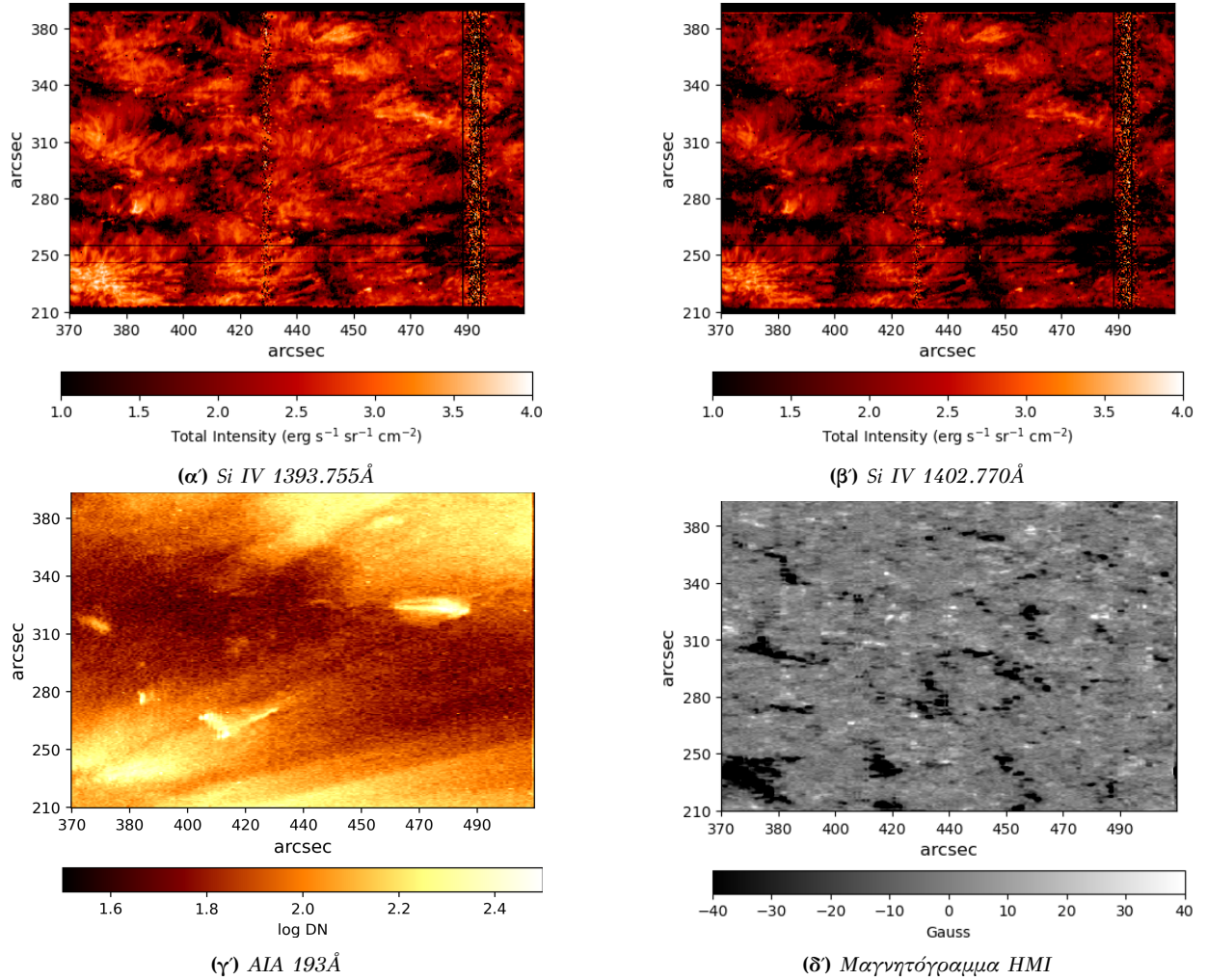
Στην παρούσα μελέτη επιλέγεται παρατήρηση τύπου σάρωσης (raster) μιας στεμματικής οπής μέσου ηλιακού πλάτους στο μακρινό υπεριώδες του διαστημικού φασματογράφου Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS) στις 9 Οκτωβρίου 2013, με χρονική διάρκεια 3.5 ώρες.

Ακόμα, χρησιμοποιούνται δεδομένα του εικονολήπτη Atmospheric Imaging Assembly (AIA) και του μαγνητογράφου Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) που είναι όργανα της διαστημικής αποστολής Solar Dynamic Observatory (SDO)⁹. Από το AIA χρησιμοποιήθηκαν εικόνες της στεμματικής γραμμής εκπομπής Fe XII στα 193 Å, η οποία σχηματίζεται σε θερμοκρασία του πλάσματος $T \sim 1.3 \times 10^6$ K, ενώ από

⁹<https://sdo.gsfc.nasa.gov/mission/instruments.php>

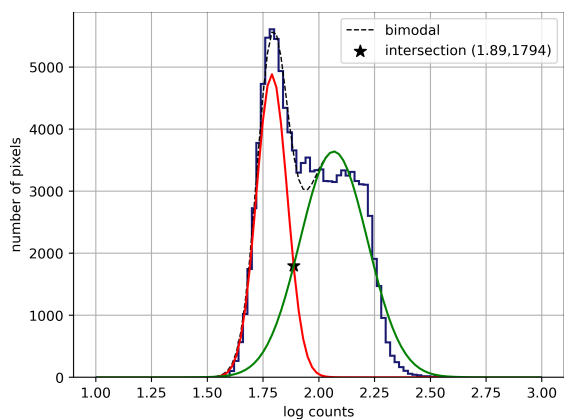
το HMI μαγνητογραφήματα του φωτοσφαιρικού μαγνητικού πεδίου στην διεύθυνση παρατήρησης.

Για την καλύτερη συσχέτιση των μετρήσεων αυτών με την εικόνα του IRIS, πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας ότι στην χρονική διάρκεια της παρατήρησης IRIS υπάρχει αλλοίωση της περιοχής παρατήρησης λόγω της ηλιακής περιστροφής. Για αυτό το λόγο κατασκευάζουμε τεχνητές εικόνες σάρωσης, ενώνοντας "λωρίδες" των εικόνων AIA και HMI για κάθε χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στην μέτρηση IRIS (βλ. Σχ. ΣΤ'.1).

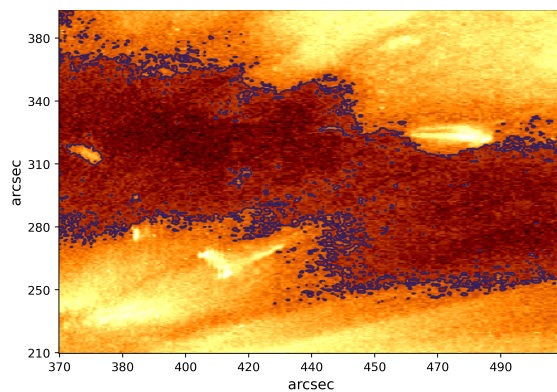


Σχήμα ΣΤ'.1: Πάνω: Ο λογάριθμος της ολοκληρωμένης (ολικής) έντασης των γραμμών εκπομπής $Si\ IV$ στα i) $1393.775\text{\AA}$ και ii) $1402.770\text{\AA}$ (IRIS). Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωμένη ένταση παίρνει τιμές στο εύρος $[10, 10^4]\text{ erg s}^{-1}\text{ sr}^{-1}\text{ cm}^{-2}$.

Κάτω: Σύνθετες εικόνες iii) της λογαριθμικής έντασης σε DN στη γραμμή $Fe\ XII\ 193\text{\AA}$ (AIA) και iv) της έντασης του μαγνητικού πεδίου στην διεύθυνση παρατήρησης (HMI). Οι τιμές της έντασης στη γραμμή $Fe\ XII\ 193\text{\AA}$ βρίσκονται στο εύρος $[10^{1.5}, 10^{2.5}]\text{ DN}$ και οι τιμές του μαγνητικού πεδίου στο εύρος $[-40, 40]\text{ Gauss}$.



(α) Ιστόγραμμα του λογαρίθμου του αριθμού δεδομένων του οργάνου (DN). Οι καμπύλες Γκαους περιγράφουν τις εντάσεις του ήρεμου Ηλίου (κόκκινη καμπύλη) και της στεμματικής οπής (πράσινη καμπύλη). Το σημείο τομής των καμπυλών καθορίζει το όριο της στεμματικής οπής.



(β) Όρια στεμματικής οπής, όπως σκιαγραφούνται από την μπλε γραμμή. Η ένταση διαχωρισμού οπής και ήρεμου ήλιου προέρχεται από την τομή των καμπυλών Γκαους του σχήματος Σχ. ΣΤ'.2α.

Σχήμα ΣΤ'.2: Προσδιορισμός του ορίου της στεμματικής οπής μέσω της εικόνας AIA

ΣΤ'.3 Μεθοδολογία

ΣΤ'.3.1 Εύρεση ορίων στεμματικής οπής

Για την εύρεση των ορίων της στεμματικής οπής, χρησιμοποιείται η τεχνητή εικόνα σάρωσης AIA 193Å. Το ιστόγραμμα του 'αριθμού δεδομένων' (Data Numbers, DN), που εκφράζουν την ψηφιακή ανταπόκριση του ανιχνευτή στην πρόσπτωση ακτινοβολίας σε αυτό το μήκος κύματος, εμφανίζει δύο κατανομές. Βάσει των Krista and Gallagher (2009), η στεμματική οπή αντιστοιχεί στα σημεία τα οποία παρουσιάζουν ένταση μικρότερη από το σημείο τομής των δύο κατανομών όπως αυτό φαίνεται στο Σχ. ΣΤ'.2.

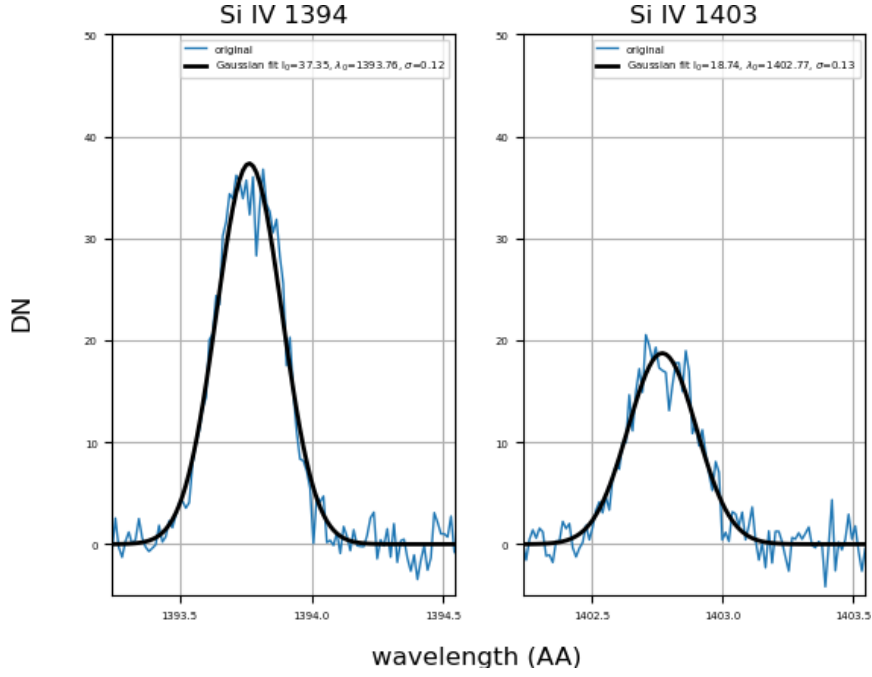
ΣΤ'.3.2 Λόγοι εντάσεων και μετατοπίσεις Doppler

Αρχικά, πραγματοποιείται γκαουσιανή προσαρμογή σε κάθε φασματικό προφίλ των φασματικών γραμμών Si IV 1393.755Å, 1402.277Å των παρατηρήσεων του IRIS, σύμφωνα με την 6.1. Παράδειγμα εφαρμογής της προσαρμογής φαίνεται στο Σχ. ΣΤ'.3.

$$f(\lambda) = I_0 \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.1)$$

όπου I_0 η μέγιστη τιμή του προφίλ, λ_0 το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής στη θέση ηρεμίας (μηδενικής μετατόπισης Doppler), λ το μήκος κύματος της μετατόπισης Doppler του προφίλ και σ το φασματικό εύρος. Εν συνεχεία, υπολογίζεται η ολοκληρωμένη ένταση κάθε φασματικής γραμμής (6.2) και ο λόγος τους I_{1394}/I_{1403} .

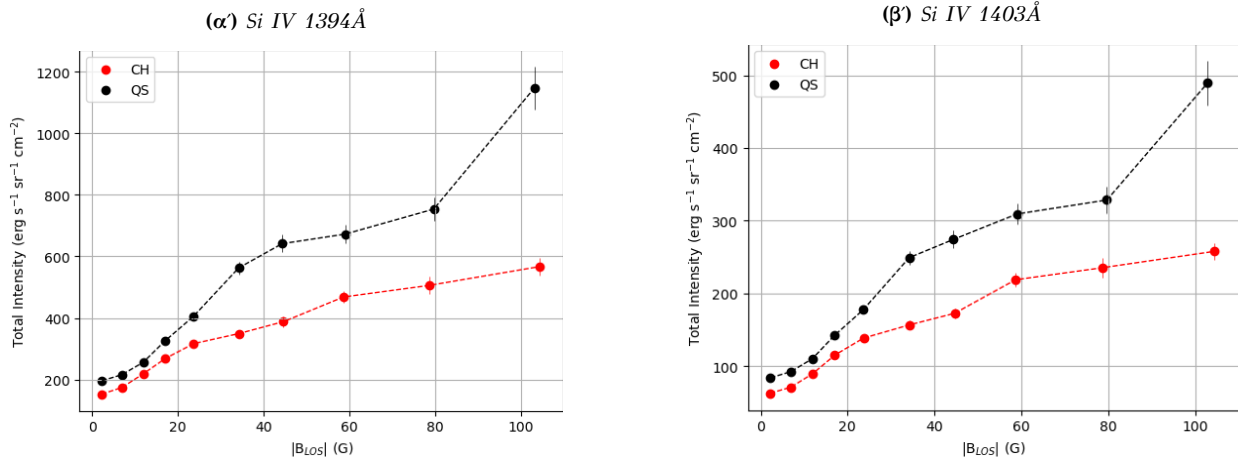
$$I = \sqrt{2\pi} \cdot I_0 \cdot \sigma \quad (6.2)$$



Σχήμα ΣΤ.3: Προσαρμογή Γκαουσιανής καμπύλης σε προφίλ των δύο φασματικών γραμμών. Στα διαγράμματα φαίνεται με μπλε η μέτρηση του IRIS και με μαύρο η προσαρμοσμένη καμπύλη, όπου I_0 η μέγιστη τιμή έντασης του προφίλ, λ_0 το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη μέγιστη ένταση και σ το φασματικό εύρος.

ΣΤ.4 Αποτελέσματα

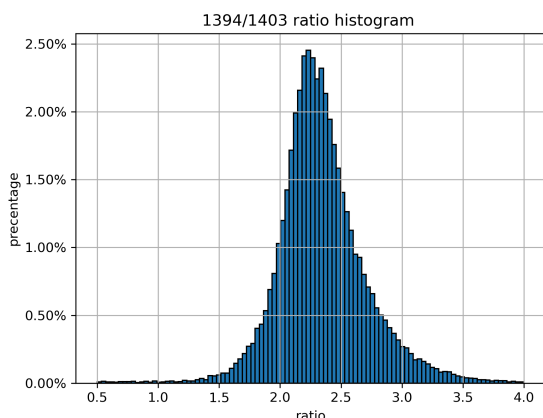
Στο Σχ. ΣΤ.4 φαίνεται η μέση τιμή της έντασης ακτινοβολίας για κάθε φασματική γραμμή σε συνάρτηση με το μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από τις μετρήσεις του HMI. Επιβεβαιώνουμε ότι εντός της στεμματικής οπής η μέση ένταση είναι μικρότερη σε σχέση με τον ήρεμο ήλιο.



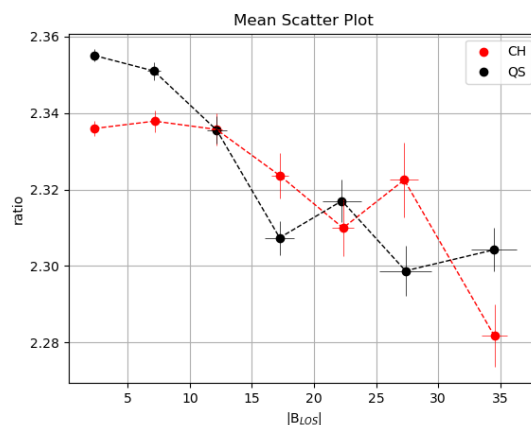
Σχήμα ΣΤ.4: Πάνω: Διάγραμμα της ολοκληρωμένης έντασης Si IV στα i) 1394 Å και ii) 1403 Å σε συνάρτηση με το $|B_{LOS}|$, σε κάθε περιοχή (στεμματική οπή: κόκκινο, ήρεμος ήλιος: μαύρο). Τα σημεία αντιστοιχούν στην μέση τιμή της ολοκληρωμένης έντασης ανά ομαδοποιημένες τιμές του $|B_{LOS}|$ και οι κάθετες μπάρες στο σφάλμα μέσης τιμής.

Στο Σχ. ΣΤ.5 φαίνεται η κατανομή του λόγου εντάσεων. Οι πρώτες μετρήσεις

φανερώνουν αποκλίσεις από την κανόνα $I_{1394}/I_{1403}=2$ του οπτικά λεπτού πλάσματος και απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι οι λόγοι εντάσεων δεν διαφοροποιούνται εντός της στεμματικής οπής σε σχέση με τον ήρεμο Ήλιο, για διαφορετικές τιμές της απόλυτης τιμής του μαγνητικού πεδίου στην διεύθυνση παρατήρησης.



Σχήμα ΣΤ.5: Ιστογράμμο λόγου εντάσεων



Σχήμα ΣΤ.6: Διάγραμμα λόγου εντάσεων I_{1394}/I_{1403} σε συνάρτηση με την απόλυτη τιμή του μαγνητικού πεδίου ($|B_{LOS}|$) σε κάθε περιοχή (στεμματική οπή: κόκκινο, ήρεμος ήλιος: μαύρο). Τα σημεία αντιστοιχούν στην μέση τιμή του λόγου ανά ομαδοποιημένες τιμές του $|B_{LOS}|$ και οι κάθετες μπάρες στο σφάλμα μέσης τιμής.

ΣΤ.5 Συμπεράσματα

Όπως αναμένεται, η συμπεριφορά των δύο φασματικών γραμμών είναι παρόμοια, καθώς προέρχονται από μεταβάσεις του ίδιου ιόντος. Παράλληλα, μπορούμε να δούμε ότι στην εικόνα των γραμμών Si IV δεν εμφανίζονται ορατές διαφορές μεταξύ στεμματικής οπής και ήρεμου Ηλίου. Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι κατά μέσο όρο η ολοκληρωμένη ροή ακτινοβολίας εντός της στεμματικής οπής είναι μικρότερη σε σχέση με αυτήν στον ήρεμο Ήλιο για μεγάλες τιμές του $|B_{LOS}|$ (βλ. Σχ. ΣΤ.4), κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και από άλλες μελέτες (Tripathi, Nived and Solanki (2021)).

Επιπρόσθετα, παρατηρούμε απόκλιση από τον κανόνα $I_{1394}/I_{1403}=2$, αλλά και μικρή διαφορά στους μέσους λόγους I_{1394}/I_{1403} σε συνάρτηση με το $|B_{LOS}|$ εντός της στεμματικής οπής και στον ήρεμο Ήλιο. Και οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση, καθώς η μέλετη του λόγου I_{1394}/I_{1403} μπορεί να δώσει πολύτιμα στοιχεία για την φυσική της μεταβατικής περιοχής των στεμματικών οπών, περιοχές που θεωρείται ότι είναι οι βάσεις του Ηλιακού ανέμου. Στη συνέχεια της παρούσας μελέτης, θα ερευνήσουμε στοιχεία των φασματικών παρατηρήσεων που μπορεί να οφείλονται στον ηλιακό άνεμο. Επίσης, παρατηρούμε την ύπαρξη δομών, όπως έναν στεμματικό πίδακα (coronal jet) και στεμματικό "φτερό" (coronal plume), τις οποίες θα μελετήσουμε το επόμενο διάστημα.

Αναφορές

- Gontikakis C. and Vial J.C., 2018, *Astron. Astrophys.*, 619, A69.
- Harra L., 2012, arXiv preprint arXiv:1201.4646.
- Hassler D.M., Dammasch I.E., Lemaire P. et al., 1999, *Science*, 283 (5403), 810.
- Jordan C., 1967, *Solar Physics*, 2 (4), 441.
- Koskinen H. and Vainio R., 2009, *Lectures on Solar Physics*, Universidade de Helsinki–Finlândia.
- Krieger A.S., Timothy A.F. and Roelof E.C., 1973, *Solar Physics*, 29 (2), 505.
- Krista L. and Gallagher P., 2009, *Sol. Phys.*, 256, 87.
- Phillips K., Feldman U. and Landi E., 2008, *Ultraviolet and X-ray Spectroscopy of the Solar Atmosphere*, Cambridge University Press.
- Priest E., 2014, *Magnetohydrodynamics of the Sun*, Cambridge University Press.
- Raju K., 2009, *Sol. Phys.*, 255, 119.
- Tian H., Harra L., Baker D., Brooks D. and Xia L., 2021, *Sol. Phys.* 296, 47.
- Tripathi D., Nived V. and Solanki S., 2021, *Astrophys. J.*, 908, 28.
- Tripathi D., Nived V.N., Isobe H. and Doyle G.G., 2020, *Astrophys. J.*, 894 (2), 128.
- Zanna G. and Mason H., 2018a, *Living Rev. Sol. Phys.*, 15, 5.
- Αλυσανδράκης Κ., Νίντος Α. και Πατσουράκος Σ., 2015, *Φυσική του Ήλιου και του διαστήματος*, Εκδόσεις Κάλλιπος.

Ζ' Ο Μηχανισμός δυναμικής αντιστοίχισης σε ένα δυναμικό τύπου Καλντέρας

Ματθαίος Κατσανίκας¹⁰

Περίληψη

Η δυναμική αντιστοίχιση εμφανίζεται σε μια ποικιλία σημαντικών οργανικών χημικών αντιδράσεων. Παρατηρείται ότι είναι αποτέλεσμα μιας ενεργειακής επιφάνειας ενός δυναμικού που έχει ειδικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, το δυναμικό αυτό έχει μια περιοχή σχετικής επιπεδότητας όπου η είσοδος και η έξοδος σε αυτήν την περιοχή ελέγχεται από σαγματικά σημεία δείκτη 1. Παραδείγματα τέτοιων δυναμικών που έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά είναι το δυναμικό της Καλντέρας. Αναπτύσσουμε ένα προγνωστικό εργαλείο του φαινομένου της δυναμικής αντιστοίχισης σε μια ισο-ενέργειακή επιφάνεια δυναμικού Καλντέρας. Δείχνουμε ότι η δομή του χώρου φάσης που καθορίζει αν θα έχουμε δυναμική αντιστοίχιση ή όχι αντιστοιχεί σε έναν συγκεκριμένο τύπο τροχιών, τις ετεροκλινικές τροχιές. Οι τροχιές αυτές βρίσκονται σε λοβούς ανάμεσα σε ετεροκλινικά σημεία αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων ασταθών περιοδικών τροχιών.

Ζ.1 Εισαγωγή

Η δυναμική αντιστοίχιση είναι ένα ενδιαφέρον χημικό δυναμικό φαινόμενο που εμφανίζεται σε μια ποικιλία οργανικών χημικών αντιδράσεων. Για παράδειγμα, συμβαίνει στην αναδιάταξη βινυλκυκλοπροπανίου-κυκλοπεντανίου (Baldwin, 2003; Goldschmidt and Crammer, 1988), τη στερεομετάλλαξη του κυκλοπροπανίου (Doubleday, Bolton and Hase, 1997), την εκφυλισμένη αναδιάταξη του bicyclo[3.1.0]-ene ή αυτό του 5-μεθυλενοδικυκλο[2.1.0]πεντανίου (Reyes, Lobkovsky and Carpenter, 2002). Μια γενική περιγραφή του φαινομένου δόθηκε για πρώτη φορά από τον Carpenter στο (Carpenter, 1985, 1995) όπου υποστηρίχθηκε ότι ένας γενικός τύπος επιφάνειας δυναμικού που εμφανίζει το φαινόμενο δυναμικής αντιστοίχισης μοιάζει μορφολογικά με αυτό μιας Καλντέρας.

Το δυναμικό της Καλντέρας πήρε το όνομά του από το σχήμα της περιοχής που αντιστοιχεί σε ένα ηφαίστειο που εκρύνεται. Χαρακτηρίζεται από μια ρηχή, σχεδόν «επίπεδη» περιοχή του πηγαδιού του δυναμικού (ένα κεντρικό ελάχιστο), που περιβάλλεται από τέσσερα κανάλια εισόδου/εξόδου με τη μορφή σαγματικών σημείων δείκτη-1. Δύο από αυτά τα σαγματικά σημεία έχουν χαμηλές ενεργειακές τιμές και αντιστοιχούν στο σχηματισμό χημικών προϊόντων, ενώ τα άλλα δύο έχουν υψηλότερες τιμές σε ενέργεια και αντιστοιχούν στα αντιδρώντα.

Η εκδήλωση του φαινομένου δυναμικής αντιστοίχισης είναι ουσιαστικά μια εκδήλωση της διατήρησης της ορμής και του πρώτου νόμου κίνησης του Νεύτωνα. Παρατηρείται ότι μια τροχιά που εισέρχεται στην Καλντέρα από ένα κανάλι, που αντιστοιχεί σε ένα σαγματικό σημείο υψηλής ενέργειας (αντιδρών), δέχεται μικρή δύναμη στην Καλντέρα λόγω της «επιπεδότητας» του δυναμικού και εξέρχεται από

¹⁰Ο κ. Κατσανίκας διορίστηκε ως Ερευνητής Γ' στο ΚΕΑΕΜ τον Σεπτέμβριο του 2021.

το διαμετρικά αντίθετο κανάλι που αντιστοιχεί στο σαγματικό σημείο χαμηλής ενέργειας (προϊόν). Κατά συνέπεια, αυτός ο μηχανισμός καθορίζει σε σημαντικό βαθμό το αποτέλεσμα της χημικής αντίδρασης. Ωστόσο, δεν έχουν όλες οι τροχιές που εισέρχονται στην Καλντέρα δυναμική αντιστοίχιση. Παρατηρείται ότι ορισμένες τροχιές μπορεί να αλληλεπιδράσουν με το ρηχό πηγάδι του δυναμικού και να παγιδευτούν προσωρινά στην περιοχή αυτή. Αυτό μπορεί να επηρεάσει δραματικά τον τρόπο με τον οποίο εξέρχονται από το πηγάδι.

Μια λεπτομερής μελέτη της συμπεριφοράς μιας τροχιάς σε ένα δυναμικό τύπου Καλντέρας δύο βαθμών ελευθερίας δόθηκε στο (Collins, Kramer, Carpenter et al., 2014), όπου παρουσιάζεται επίσης μια γενικότερη συζήτηση των δυναμικών που μοιάζουν με την Καλντέρα σε οργανικές χημικές αντιδράσεις. Περαιτέρω εργασία για την αποσαφήνιση των φαινομένων δυναμικής αντιστοίχισης και παγίδευσης σε αυτό το μοντέλο Καλντέρας πραγματοποιήθηκε στο (Katsanikas and Wiggins, 2018, 2019). Θα περιγράψουμε τα αποτελέσματα σε αυτές τις εργασίες με περισσότερες λεπτομέρειες όταν περιγράφουμε την Χαμιλτονιανή στην επόμενη ενότητα.

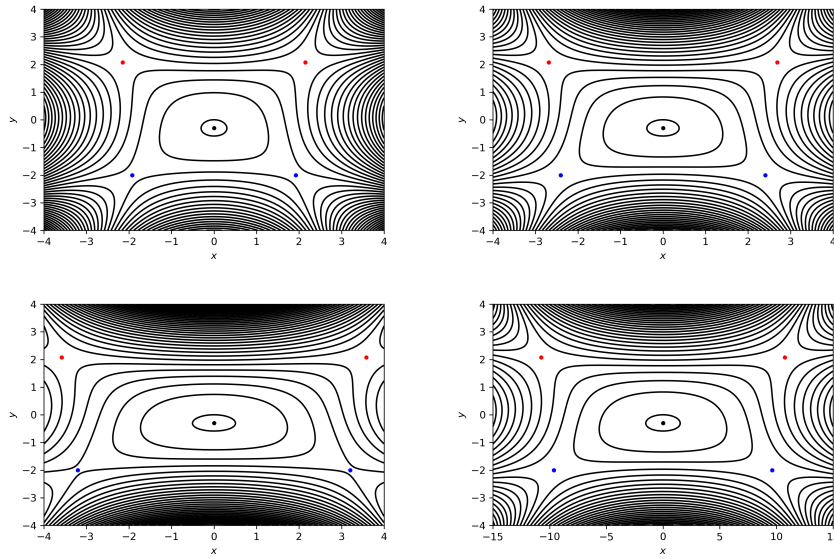
Η δομή της εργασίας είναι η εξής: Στην ενότητα Ζ'.2 περιγράφουμε το δυναμικό της Καλντέρας που χρησιμοποιούμε σε αυτήν την εργασία, τα κρίσιμα σημεία και τη Χαμιλτονιανή που προκύπτει. Η ενότητα Ζ'.3 είναι αφιερωμένη στην ανάλυση των δομών του φασικού χώρου που αντιστοιχούν στη δυναμική αντιστοίχιση. Τέλος, στην ενότητα Ζ'.4 συνοψίζουμε τα αποτελέσματα και δίνουμε μια προοπτική για μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας.

Ζ.2 Το Χαμιλτονιανό μοντέλο της Καλντέρας

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε το δυναμικό της Καλντέρας που εξετάζουμε. Αυτό το μοντέλο έχει μελετηθεί στο παρελθόν στο (Collins, Kramer, Carpenter et al., 2014; Katsanikas and Wiggins, 2018, 2019). Τα βασικά χαρακτηριστικά του δυναμικού είναι ένα κεντρικό ελάχιστο που περιβάλλεται από τέσσερα σαγματικά σημεία δείκτη-1. Δύο από αυτά είναι υψηλότερης ενέργειας από τα άλλα και οι δομές του φασικού χώρου που σχετίζονται με αυτά ελέγχουν την είσοδο και την έξοδο στην Καλντέρα. Το δυναμικό, το οποίο περιέχει μια παράμετρο λ που ελέγχει το τέντωμα του δυναμικού στην οριζόντια κατεύθυνση, δίνεται από:

$$V(x, y) = c_1 (y^2 + (\lambda x)^2) + c_2 y - c_3 ((\lambda x)^4 + y^4 - 6(\lambda x)^2 y^2) \quad (7.1)$$

Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται σε αυτό το άρθρο είναι $c_1 = 5$, $c_2 = 3$, $c_3 = -3/10$ και $0 < \lambda \leq 1$ (η παράμετρος τεντώματος). Η συμμετρική Καλντέρα (Collins, Kramer, Carpenter et al., 2014; Katsanikas and Wiggins, 2018) αντιστοιχεί σε $\lambda = 1$ και εμφανίζεται στο επάνω αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.1. Στα υπόλοιπα πλαίσια του Σχ. Ζ'.1 απεικονίζουμε το δυναμικό και τα σημεία ισορροπίας για $\lambda = 0.8$, $\lambda = 0.6$ και $\lambda = 0.2$. Ο πίνακας 1.3 δίνει τις θέσεις και τις ενέργειες των άνω σαγματικών σημείων για τις διαφορετικές τιμές του λ που εμφανίζονται στο Σχ. Ζ'.1. Παρατηρούμε ότι οι θέσεις των σαγματικών σημείων δείκτη-1 απομακρύνονται από το κέντρο της Καλντέρας καθώς μειώνουμε την παράμετρο λ , η οποία είναι συνέπεια του τεντώματος του δυναμικού στον οριζόντιο άξονα. Η θέση του κεντρικού ελάχιστου δίνεται από $(x, y) = (0, -0.297)$ με ενέργεια $E = -0.448$ για όλες τις τιμές της παραμέτρου λ .



Σχήμα Z.1: Το ευσταθές σημείο ισορροπίας στο κέντρο (που απεικονίζεται με ένα μαύρο σημείο), τα άνω σαγματικά σημεία (απεικονίζονται με κόκκινα σημεία), τα κάτω σαγματικά σημεία (απεικονίζονται με μπλε σημεία) και οι ισοδυναμικές για $\lambda = 1$ (πάνω αριστερά πλαίσιο), $\lambda = 0.8$ (πάνω δεξιά πλαίσιο), $\lambda = 0.6$ (κάτω αριστερό πλαίσιο) και $\lambda = 0.2$ (κάτω δεξιά πλαίσιο).

Σημείο ισορροπίας	x	y	λ
Άνω αριστερά σαγματικό σημείο	-2.149	2.0778	1
Άνω δεξιά σαγματικό σημείο	2.149	2.0778	1
Άνω αριστερά σαγματικό σημείο	-2.6862	2.0778	0.8
Άνω δεξιά σαγματικό σημείο	2.6862	2.0778	0.8
Άνω αριστερά σαγματικό σημείο	-3.5815	2.0778	0.6
Άνω δεξιά σαγματικό σημείο	3.5815	2.0778	0.6
Άνω αριστερά σαγματικό σημείο	-10.7446	2.0778	0.2
Άνω δεξιά σαγματικό σημείο	10.7446	2.0778	0.2

Πίνακας 1.3: Η θέση των άνω σαγματικών σημείων για διάφορες τιμές του λ . Η ενέργεια για κάθε μία από τις περιπτώσεις είναι $E = 27.0123$.

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + V(x, y), \quad (7.2)$$

όπου $V(x, y)$ είναι το δυναμικό της Καλντέρα στην Εξ. (7.1) και m_x, m_y είναι οι μάζες των x και y αντίστοιχα. Σε αυτήν την εργασία, για λόγους απλότητας, λαμβάνουμε $m_x = m_y = 1$. Οι εξισώσεις κίνησης του *Hamilton* δίνονται από:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m_x} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m_y} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2\lambda(\lambda x) [2c_3((\lambda x)^2 - 3y^2) - c_1] \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y [2c_3(y^2 - 3(\lambda x)^2) - c_1] - c_2 \end{cases} \quad (7.3)$$

Ζ.3 Ο Μηχανισμός του φασικού χώρου της δυναμικής αντιστοίχισης

Όπως έχουμε περιγράψει στην εισαγωγή, η Καλντέρα πήρε το όνομά της από το σχήμα της. Ωστόσο, η μεταφορά κατά μήκος της Καλντέρας είναι ένα δυναμικό φαινόμενο που οφείλεται στις γεωμετρικές δομές στο χώρο των φάσεων και η δυναμική αντιστοίχιση είναι μόνο ένας συγκεκριμένος τύπος δυναμικού φαινομένου που εξετάζουμε σε αυτήν την εργασία. Αρχικά, περιγράφουμε τις δομές του φασικού χώρου που μεσολαβούν στη μεταφορά στην Καλντέρα.

Για να αποκαλύψουμε τις δομές του χώρου φάσης που είναι υπεύθυνες για τον μηχανισμό που επιτρέπει και αποτρέπει τη δυναμική αντιστοίχιση, χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία τη μέθοδο των περιγραφικών *Lagrangian* (LDs), βλ. π.χ. (Mancho, Wiggins, Curbelo et al., 2013; Lopesino, Balibrea-Iniesta, García-Garrido et al., 2017; Agaoglou, Aguilar-Sanjuan, García Garrido et al., 2020). Οι περιγραφείς *Lagrangian* είναι ένα βαθμωτό διαγνωστικό εργαλείο βασισμένο σε τροχιές που έχει αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία της μη γραμμικής δυναμικής για να διερευνήσει την γεωμετρία των δομών του φασικού χώρου που χαρακτηρίζει ποιοτικά την δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος. Η τεχνική αναπτύχθηκε αρχικά για μελέτες μεταφοράς και ανάμειξης σε γεωφυσικές ροές (Madrid and Mancho, 2009) αλλά πρόσφατα εφαρμόστηκε σε προβλήματα στη δυναμική των χημικών αντιδράσεων π.χ. τη γνώση των δομών του χώρου φάσης που διαχωρίζουν τα αντιδρώντα από τα προϊόντα. Οι πρόσφατες τροποποιήσεις αυτής της τεχνικής, γνωστές ως περιγραφείς *Lagrange* μεταβλητού χρόνου ολοκλήρωσης, την έχουν καταστήσει εφαρμόσιμη στην εύρεση της δομής του χώρου φάσης σε ανοιχτά Χαμιλτονιανά συστήματα (Junginger, Duvenbeck, Feldmaier et al., 2017; Agaoglou, Aguilar-Sanjuan, García-Garrido et al., 2019; Agaoglou, Aguilar-Sanjuan, García Garrido et al., 2020). Λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο εφαρμογής τους για την αποκάλυψη δομών χώρου φάσης σε δυναμικά που μοιάζουν με την Καλντέρα περιγράφονται στο (Katsanikas, García-Garrido and Wiggins, 2020). Σε αυτή τη

σύντομη εργασία εστιάζουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με τη δυναμική αντιστοίχιση.

Για ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας, η ενεργειακή επιφάνεια είναι τρισδιάστατη. Για ενέργειες πάνω από αυτές των άνω σαγματικών σημείων υπάρχει μια ασταθής περιοδική τροχιά στην ενεργειακή επιφάνεια. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος *Lyapunov* (Moser, 1976; Weinstein, 1973; Rabinowitz, 1982). Σε μια σταθερή ενεργειακή επιφάνεια, αυτές οι περιοδικές τροχιές έχουν δισδιάστατες ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες. Οι τροχιές απομακρύνονται από τις περιοδικές τροχιές κατά μήκος της κατεύθυνσης της ασταθούς πολλαπλότητας εμπρός στον χρόνο. Στο επάνω αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2 δείχνουμε ένα τμήμα της ασταθούς πολλαπλότητας της ασταθούς περιοδικής τροχιάς του άνω δεξιού σαγματικού σημείου που κατευθύνεται προς το εσωτερικό της Καλντέρας.

Η περιοχή του κεντρικού ελάχιστου της Καλντέρας μπορεί επίσης να περιέχει ασταθείς περιοδικές τροχιές. Οι ευσταθείς πολλαπλότητες αυτών των περιοδικών τροχιών κατευθύνουν τροχιές προς το κεντρικό ελάχιστο (την κεντρική περιοχή της Καλντέρας). Στο επάνω αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2 δείχνουμε ένα τμήμα της ευσταθούς πολλαπλότητας μιας ασταθούς περιοδικής τροχιάς στην περιοχή του κεντρικού ελάχιστου που κατευθύνεται μακριά από το κεντρικό ελάχιστο.

Εάν η ευσταθής πολλαπλότητα μιας περιοδικής τροχιάς που βρίσκεται στην περιοχή του κεντρικού ελάχιστου τέμνει τις ασταθείς πολλαπλότητες μιας ασταθούς περιοδικής τροχιάς μιας από τις οικογένειες περιοδικών τροχιών των άνω σαγματικών σημείων, τότε δημιουργείται ένας μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για το ότι οι τροχιές εισέρχονται στην Καλντέρα και κατευθύνονται προς την περιοχή του κεντρικού ελάχιστου. Στην ορολογία των δυναμικών συστημάτων αυτό αναφέρεται ως ετεροκλινική τομή. Αυτό θα εμπόδιζε τη δυναμική αντιστοίχιση, καθώς οι τροχιές που εισέρχονται στην Καλντέρα θα παρουσίαζαν (προσωρινή) παγίδευση στην περιοχή του κεντρικού ελάχιστου. Εάν διακοπεί η ετεροκλινική τομή, όπως μπορεί να συμβεί εάν μια παράμετρος μεταβάλλεται, ο μηχανισμός για την κατεύθυνση των τροχιών προς τις περιοχές του κεντρικού ελάχιστου δεν υπάρχει πλέον και είναι δυνατή η δυναμική αντιστοίχιση. Ως εκ τούτου, μια ετεροκλινική διακλάδωση είναι η κρίσιμη δομή του χώρου των φάσεων που αναστέλλει ή επιτρέπει τη δυναμική αντιστοίχιση, την οποία δείχνουμε τώρα.

Προκειμένου να διερευνηθεί ο σχηματισμός μιας ετεροκλινικής τομής μεταξύ οποιασδήποτε ευσταθούς πολλαπλότητας προερχόμενης από μια ασταθή περιοδική τροχιά της κεντρικής περιοχής της Καλντέρας και της ασταθούς πολλαπλότητας της ασταθούς περιοδικής του άνω δεξιού σαγματικού σημείου δείκτη-1, μεταβάλλουμε την παράμετρο τεντώματος του δυναμικού της Καλντέρας και εξετάζουμε τις δομές του χώρου των φάσεων στην ακόλουθη επιφάνεια τομής του Poincaré:

$$\mathcal{U}_{x,p_x}^+ = \{(x, y, p_x, p_y) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 1.88409, p_y > 0, E = 29\} \quad (7.4)$$

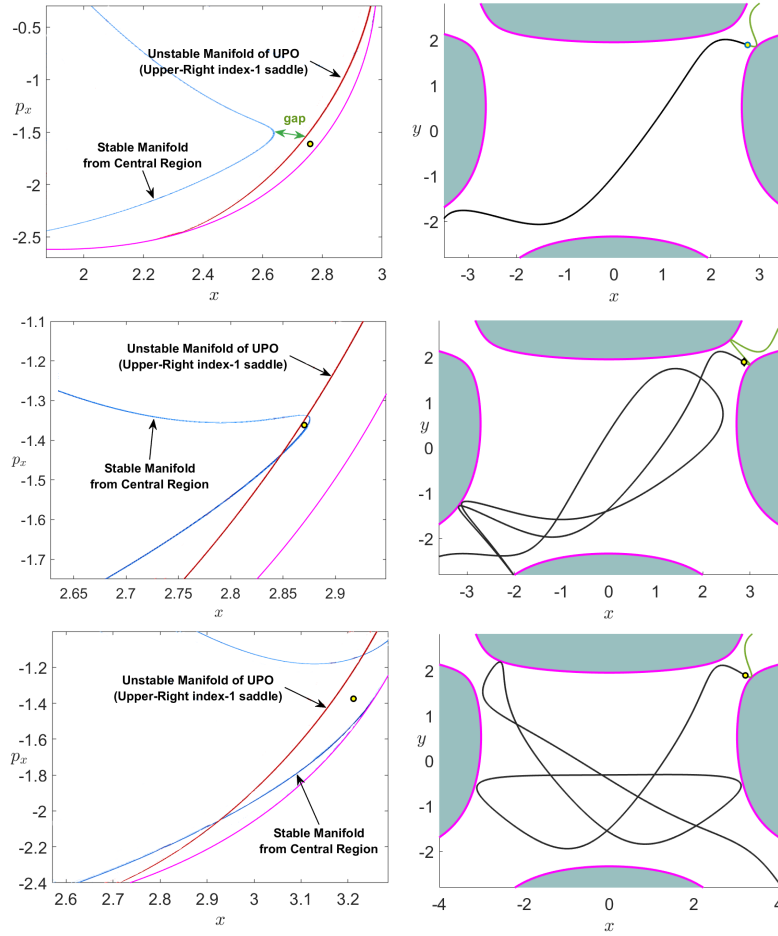
Στο μεσαίο αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου τεντώματος ($\lambda = 0.778$) για το σχηματισμό αυτής της ετεροκλινικής τομής. Για τιμές της παραμέτρου πάνω από την κρίσιμη τιμή δεν υπάρχει ετεροκλινική τομή μεταξύ οποιασδήποτε ευσταθούς πολλαπλότητας προερχόμενης από μια ασταθή περιοδική τροχιά της κεντρικής περιοχής της Καλντέρας και της ασταθούς πολλαπλότητας του άνω σαγματικού σημείου δείκτη-1 (δείτε το επάνω

αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2). Η μη ύπαρξη αυτών των ετεροκλινικών τομών έχει ως αποτέλεσμα το φαινόμενο της δυναμικής αντιστοίχισης. Σε αυτήν την περίπτωση, εάν ολοκληρώσουμε μια αρχική συνθήκη εντός της περιοχής της ασταθούς πολλαπλότητας της ασταθούς περιοδικής τροχιάς του άνω σαγματικού σημείου προς τα εμπρός και προς τα πίσω στο χρόνο, βλέπουμε στο επάνω δεξιό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2 ότι η προκύπτουσα τροχιά προέρχεται από την περιοχή του άνω δεξιού σαγματικού σημείου και εξέρχεται από την Καλντέρα μέσω της περιοχής του απέναντι κάτω σαγματικού σημείου χωρίς καμία αλληλεπίδραση με την κεντρική περιοχή της Καλντέρας.

Τώρα, για τιμές της παραμέτρου τετνώματος του δυναμικού ίσες ή μικρότερες από την κρίσιμη τιμή, έχουμε τον σχηματισμό ετεροκλινικών τομών μεταξύ της ευσταθούς πολλαπλότητας που προέρχεται από μια ασταθή περιοδική τροχιά της κεντρικής περιοχής της Καλντέρας και της ασταθούς πολλαπλότητας της ασταθούς περιοδικής τροχιάς του άνω δεξιού σαγματικού σημείου, βλέπε μεσαίο και κάτω αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2. Αυτή η ετεροκλινική τομή καταστρέφει τον δυναμικό μηχανισμό αντιστοίχισης επειδή πολλές τροχιές παγιδεύονται μέσα στους λοβούς μεταξύ των δύο αμετάβλητων πολλαπλοτήτων. Αυτό μπορούμε να το δούμε καλύτερα αν επιλέξουμε μια αρχική συνθήκη μέσα σε έναν λοβό, όπως απεικονίζουμε στο μεσαίο και κάτω αριστερό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2 και την ολοκληρώσουμε προς τα εμπρός και προς τα πίσω στον χρόνο. Παρατηρούμε ότι η τροχιά που προκύπτει παγιδεύεται προσωρινά στην κεντρική περιοχή της Καλντέρας πριν βγει από αυτήν την περιοχή, δείτε το μεσαίο και κάτω δεξιό πλαίσιο του Σχ. Ζ'.2.

Ζ'.4 Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία δείξαμε ότι τα ετεροκλινικά σημεία αποτελούν τον μηχανισμό του φασικού χώρου που ελέγχει την ύπαρξη ή όχι της δυναμικής αντιστοίχισης. Ενώ έχουμε παρουσιάσει αυτή τη συμπεριφορά για ένα Χαμιλτονιανό μοντέλο τύπου Καλντέρας δύο βαθμών ελευθερίας, η έννοια της ετεροκλινικής τροχιάς ισχύει για δυναμικά συστήματα με αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων. Ως εκ τούτου, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο σχηματισμός αυτής της δομής του φασικού χώρου ως μηχανισμός για τον εντοπισμό της δυναμικής αντιστοίχισης σε συστήματα με τρεις ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα Ζ'.2: Δομές του φασικού χώρου που υπολογίζονται στην τομή Poincaré που περιγράφεται στην Εξίσωση (7.4) και βρίσκονται κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά του άνω δεξιά σαγματικού σημείου δείκτη-1. Έχουμε παρόμοιες δομές κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά του άνω αριστερά σαγματικού σημείου δείκτη-1 λόγω της συμμετρίας του δυναμικού. Παρουσιάζουμε τον σχηματισμό μιας ετεροκλινικής τομής, καθώς η παράμετρος τεντώματος της Καλντέρας ποικίλλει, μεταξύ μιας ευσταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας (μπλε καμπύλη) μιας ασταθούς περιοδικής τροχιάς της κεντρικής περιοχής της Καλντέρας και της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας (κόκκινη καμπύλη) που αντιστοιχεί στην ασταθή περιοδική τροχιά του άνω σαγματικού σημείου. Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί σε $\lambda = 0.8$, η δεύτερη σειρά είναι για την κρίσιμη τιμή $\lambda = 0.778$, και για την τρίτη σειρά χρησιμοποιούμε $\lambda = 0.7$. Στη δεύτερη στήλη, αποτυπώνουμε την αναστολή ή όχι της δυναμικής αντιστοίχισης απεικονίζοντας την προβολή στον χώρο (x, y) της τροχιάς μιας αρχικής συνθήκης που σημειώνεται ως κίτρινη κουκκίδα. Η εξέλιξη της τροχιάς προς τα εμπρός και προς τα πίσω απεικονίζεται με μαύρο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα. Η ροζ καμπύλη αντιπροσωπεύει την καμπύλη μηδενικής ταχύτητας.

Αναφορές

- Agaoglou M., Aguilar-Sanjuan B., García-Garrido V.J. et al., 2019, Chemical reactions: A journey into phase space, 10.5281/zenodo.3568210.
- Agaoglou M., Aguilar-Sanjuan B., García Garrido V.J. et al., 2020, Lagrangian Descriptors: Discovery and Quantification of Phase Space Structure and Transport, 10.5281/zenodo.3958985.

- Baldwin J., 2003, Chem. Rev., 103 (4), 1197.
- Carpenter B.K., 1985, J. Am. Chem. Soc., 107 (20), 5730.
- Carpenter B.K., 1995, J. Am. Chem. Soc., 117 (23), 6336.
- Collins P., Kramer Z., Carpenter B., Ezra G. and Wiggins S., 2014, J. Chem. Phys., 141 (034111).
- Doubleday C., Bolton K. and Hase W., 1997, J. Am. Chem. Soc., 119 (22), 5251.
- Goldschmidt Z. and Crammer B., 1988, Chem. Soc. Rev., 17, 229.
- Junginger A., Duvenbeck L., Feldmaier M. et al., 2017, J. Chem. Phys., 147 (6), 064101.
- Katsanikas M., García-Garrido V.J. and Wiggins S., 2020, Int. J. Bifurc. Chaos, 141, 2030026.
- Katsanikas M. and Wiggins S., 2018, Int. J. Bifurc. Chaos, 28 (13), 1830042.
- Katsanikas M. and Wiggins S., 2019, Int. J. Bifurc. Chaos, 29 (04), 1950057.
- Lopesino C., Balibrea-Iniesta F., García-Garrido V.J., Wiggins S. and Mancho A.M., 2017, Int. J. Bifurc. Chaos, 27 (01), 1730001.
- Madrid J.A.J. and Mancho A.M., 2009, Chaos, 19, 013111.
- Mancho A.M., Wiggins S., Curbelo J. and Mendoza C., 2013, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 18 (12), 3530.
- Moser J., 1976, Commun. Pure Appl. Math., 29 (6), 727.
- Rabinowitz P., 1982, SIAM J. Math. Anal., 13 (3), 343.
- Reyes M., Lobkovsky E. and Carpenter B., 2002, J. Am. Chem. Soc., 124, 641.
- Weinstein A., 1973, Invent. Math., 20 (1), 47.

Η' Δημοσιεύσεις του Κέντρου Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών για το 2020

Κατά το έτος 2020 δημοσιεύθηκαν ή έγιναν δεκτές προς δημοσίευση 49 εργασίες, εκ των οποίων 30 σε περιοδικά με σύστημα κριτών. Συγκεκριμένα οι δημοσιεύσεις είναι: Επιμέλεια ειδικών εκδόσεων: Εκδόθηκε από το ΚΕΑΕΜ ένας ειδικός τόμος με τίτλο “Νεότερες Εξελίξεις στην Αστρονομία 2019” (Επιμέλεια Γ. Κοντόπουλος και Π.Α. Πάτσης), στον οποίο παρουσιάστηκε μια σειρά άρθρων που συνοφίζουν χαρακτηριστικά πρόσφατα αποτελέσματα ερευνητικών εργασιών του ΚΕΑΕΜ. Τα περιεχόμενα του τόμου ήταν τα ακόλουθα:

- Γ. Κοντόπουλος, Α.Χ. Τζέμος & Κ. Ζουλούμη: “Η εμφάνιση του χάους στην Κβαντομηχανική Bohm”
- Π. Πάτσης: “Η ανάλυση αστρονομικών εικόνων ως εργαλείο για την κατανόηση της Δυναμικής των γαλαξιών”
- Ι. Κοντόπουλος: “Λίγες σκέψεις για το φύλλο ρεύματος στην μαγνητόσφαιρα ενός pulsar”
- Σ. Βασιλάκος: “Η μεταβαλλόμενη ενέργεια του κενού ως μηχανισμός για την κατανόηση της κοσμικής ιστορίας του σύμπαντος”
- Κ. Γοντικάκης, Ι. Κοντογιάννης, Γ. Τσιροπούλα & Κ. Τζιότζιου: “Ηλιακή Φυσική: Μορφολογική μελέτη του Ήρεμου Ήλιου”
- Μ. Χαρσούλα Χρ. Ευθυμιόπουλος & Γ. Κοντόπουλος: “Τα δομικά στοιχεία των σπειρών των γαλαξιών”
- Κ. Φλώριος & Β. Τριτάκης : “Πιθανότητα ασφαλούς πρόβλεψης γεωφυσικών φαινομένων με προηγμένες στατιστικές μεθόδους. Η περίπτωση πρόβλεψης επερχόμενης σεισμικής δραστηριότητας”

Επίσης εκδόθηκε το περιοδικό “Ιππαρχος” της Ελληνικής Αστρονομικής Εταιρείας (Volume 3, Issue 2, July 2020), την έκδοση του οποίου επιμελήθηκε ο κ. Πάτσης.

Τέλος, ο κ. Μ. Γεωργούλης επιμελήθηκε την έκδοση του ειδικού τόμου: Space Weather Research Across the Full Data Lifecycle (Eds. R. M. McGranaghan, A. Anastasiadis, E. Camporeale and M. K. Georgoulis), J. Space Weather Space Climate.

Η'.1 Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά με κριτές

(Δημοσιεύθηκαν ή έγιναν δεκτά προς δημοσίευση εντός του 2020)

1. Contopoulos G., 2020: “A review of the “Third” Integral”, Math. In Engineering, 2 (3), 472.
2. Contopoulos G. and Tzemos A.C., 2020: “Chaos in Bohmian Quantum Mechanics: A short review”, Regul. Chaotic Dyn., 25, 476.

3. Tzemos A.C. and Contopoulos G., 2020: “Ergodicity and Born’s rule in an entangled 2-qubit Bohmian system”, *Phys. Rev. E*, 102, 042205.
4. Tzemos A.C. and Contopoulos G., 2020: “Chaos and ergodicity in an entangled two- qubit Bohmian system”, *Phys. Scr.*, 95, 065225.
5. Tzemos A.C. and Contopoulos G., “Integrals of motion in time periodic Hamiltonian systems: The case of the Mathieu equation”, *Regul. Chaotic Dyn.* (in press).
6. Efthymiopoulos C., Harsoula M. and Contopoulos G., 2020: “Manifold spirals in barred galaxies with multiple pattern speeds”, *Astron. Astroph.*, 636, A44.
7. Patsis P.A., Xilouris E.M., Alikakos J. and Athanassoula E.: “Edge-on boxes with X-features as parts of galactic bars. NGC 352: A direct piece of observational evidence”, *Astron. Astroph.* (in press).
8. Contopoulos I., Petri J. and Stefanou P., 2020: “Hybrid numerical simulations of Pulsar magnetospheres”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 491, 5579.
9. Myserlis I. and Contopoulos I., 2020: “An underlying universal pattern in galaxy halo magnetic fields”, *Astron. Astroph.* (in press).
10. Florios K., Contopoulos I., Christofilakis V., Tatsis G., Chronopoulos S., C. Repapis C. and Tritakis V., 2020: “Pre-seismic electromagnetic perturbations in two earthquakes in Northern Greece”, *Pure Appl. Geophys.* 177, 787.
11. Florios K., Contopoulos I., Tatsis G., Christofilakis V., Chronopoulos S., Repapis C. and Tritakis V., 2020: “Possible earthquake forecasting in a narrow space-time-magnitude window” *Earth Sci. Inform.*, 1-16.
12. Basilakos S. and Anagnostopoulos F., 2020: “Growth index of matter perturbations in the light of Dark Energy Survey ”, *Eur. Phys. J. C*, 80, 212.
13. Basilakos S., Mavromatos N. and Sola J., 2020: “Gravitational and chiral anomalies in the running vacuum universe and matter-antimatter asymmetry”, *Pys. Rev. D.*, 101, 045001.
14. Basilakos S., Mavromatos N. and Sola J., 2020: “Quantum anomalies in string-inspired running vacuum universe: Inflation and axion dark matter”, *Phys. Lett. B.*, 803, 135342.
15. Mehrabi A. and Basilakos S., 2020: “Does Λ CDM really be in tension with the Hubble diagram data?”, *European Phys. J. C*, 80, 632.
16. Anagnostopoulos F., Basilakos S. and Saridakis E., 2020: “Observational constraints on Barrow holographic dark energy ”, *European Phys. J. C*, 80, 826.
17. Papagianopoulos G., Basilakos S. et al., 2020: “Dynamics in varying vacuum Finsler-Randers cosmology”, *European Phys. J. C*, 80, 816.
18. Mavromatos N., Sola J. and Basilakos S., 2020: “String-inspired running vacuum—The Vacuumon-And the Swampland criteria”, *Universe*, 6, 218.

19. Yang W., Di Valentino E., Pan S., Basilakos S. and Paliathanasis A., 2020: “Metastable dark energy models in light of Planck 2018 data: Alleviating the H_0 tension”, *Phys. Rev. D.*, 102, 3503.
20. Papagianopoulos G., Tsiapi P., Basilakos S. and Paliathanasis A., 2020: “Dynamics and cosmological evolution in Λ -varying cosmology”, *European Phys. J. C*, 80, 55.
21. Bresolin F., Rizzi L., Ho I.-T., Terlevich R., Terlevich E., Telles E., Chavez R., Basilakos S. and Plionis M., 2020: “Internal kinematics of giant H II regions in M101 with the Keck Cosmic Web Imager”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 495, 4347.
22. Park S-H., Leka K. D., Kusano K., et al. (incl. Georgoulis M. K.), 2020: “A 4357/ab65f0 Comparison of Flare Forecasting Methods. IV. Evaluating Consecutive-day Forecasting Patterns”, *Astrophys. J.*, 890, 12.
23. Korsós M., Georgoulis M. K., Gyenge N. T. et. al., 2020: “Solar flare prediction using magnetic field diagnostics above the photosphere”, *Astrophys. J.*, 896, 119.
24. Angryk R., Martens P. C., Aydin B et al. (incl. Georgoulis M. K.), 2020: “Multivariate time series data set for space weather data Analytics”, *Nature Scient. Data*, 7, 227.
25. Ruillard A. P., Pinto R. F., Vourlidas A. et al. (incl. Georgoulis, M. K.), 2020: “Models and data analysis tools for the Solar Orbiter Mission”, *Astron. Astroph.*, 642, A2.
26. Patsourakos S., Vourlidas, A., Torok T. et al. (incl. Georgoulis, M. K.), 2020: “Decoding the pre-eruptive magnetic field configurations of coronal mass ejections, *Space Sci. Rev.*, 216, 131.
27. Zouganelis I., De Groof A., Walsh A.P., Williams D.R., Muller D., St Cyr O.C. et al. (incl. Gontikakis C. and Georgoulis M.K.), 2020: “The Solar Orbiter Science Activity plan. Translating solar and heliospheric physics questions into action”, *Astron. Astroph.*, 642, 19.
28. Kontogiannis I., Tsiropoula G., Tziotziou K., Gontikakis C. et al., 2020: “Emergence of small-scale magnetic flux in the quiet Sun”, *Astron. Astroph.*, 633, 13.
29. Tatsis G., Christofilakis V., Chronopoulos S.K., Kostarakis P., Nistazakis H.E., Repapis C. and Tritakis V., 2020: “Design and implementation of a test fixture for ELF Schumann resonance antenna receiver and magnetic permeability measurements”, *Electronics*, 9 (1), 171.
30. Tatsis G., Christofilakis V., Chronopoulos S.K., Baldoumas G., Sakkas A. et al. (incl. Tritakis V.), 2020: “Study of the variations in the Schumann resonances parameters measured in a southern Mediterranean environment”, *Sci. Total Environ.*, 715, 136926.

H'.2 Δημοσιεύσεις σε πρακτικά συνεδρίων με κριτές

1. Patsis P.A., 2020: "The face-on views of X-shaped "bulges" - boxy features in the central parts of bars, Galactic Dynamics in the Era of Large Surveys", held 30 June - 5 July, 2019 in Shanghai, China. Proc. of the Int. Astron. Union 353, 162.
2. Cai X., Aydin. B., Ji A., Georgoulis M. K. and Angryk R., 2020: "A Framework for Detecting Polarity Inversion Lines from LoS Magnetograms", 2020 IEEE International Conference on Big Data.
3. Ji A., Aydin B., Georgoulis M. K. and Angryk R., 2020: "All-Clear Flare Prediction Using Interval-based Time Series Classifiers", 2020 IEEE International Conference on Big Data.
4. Aydin B., Ahmadzadeh A., Georgoulis M. K. and Angryk R., 2020: "Deep Neural Network-based Active Region Magnetogram Patch Super Resolution", 2020 IEEE International Conference on Big Data.
5. Habeeb M. S., Aydin B., Ahmadzadeh A., Georgoulis M. K. and Angryk R., 2020: "Neural Network-based Magnetogram Super Resolution", 2020 IEEE International Conference on Big Data.
6. Harsoula M., 2020: "The building blocks of spiral arms in galaxies", Hipparchos, 3, 13.

H'.3 Δημοσιεύσεις σε πρακτικά συνεδρίων χωρίς κριτές

1. Nita G., Georgoulis M.K., Kitiashvili I. et al., 2020: "Machine Learning in Heliophysics and Space Weather Forecasting: a White Paper of Findings and Recommendations", after EarthCube RCN Workshop entitled "Toward Integration of Heliophysics Data, Modeling and Analysis Tools", arXiv: 2006.12224.

H'.4 Δημοσιεύσεις στην Ελληνική

1. Γ. Κοντόπουλος: "Η επιστήμη ως αξία", περιοδικό Ακτίνες, 2020.
2. Γ. Κοντόπουλος: "Τάξη, Χάος και Τύχη, 2020.
3. Γ. Κοντόπουλος: "100 χρόνια της Διεθνούς Αστρονομικής Ενώσεως", περιοδικό Physics News E.E.Φ., 2019.
4. Σ. Βασιλάκος: "Νέες προοπτικές για το Αστροσκοπείο Χελμού στο πρόγραμμα, ScyLight: European Space Agency".
5. Β. Τριτάκης: "Τέταρτη Βιομηχανική ή Ψηφιακή Επανάσταση". Εφημερίδα "ΠΑΛ-ΜΟΣ" (δημοσιεύτηκε σε 4 συνέχειες).