

1 Εισαγωγή

Κοσμολογία ονομάζεται η επιστήμη η οποία μελετά το Σύμπαν ως ενιαίο σύνολο, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη βασική σχέση :

$$\text{Πείραμα} + \text{Θεωρία} \rightarrow \text{Νόμος}$$

Η κυρίαρχη δύναμη που σχετίζεται με την Κοσμολογία είναι η βαρύτητα. Η βαρύτητα είναι παγκόσμια δύναμη - η ίδια δύναμη δρα ανάμεσα στη Γη και τον Ήλιο, στη Γη και τη Σελήνη, μεταξύ γαλαξιών αλλά και σε όλο το Σύμπαν.

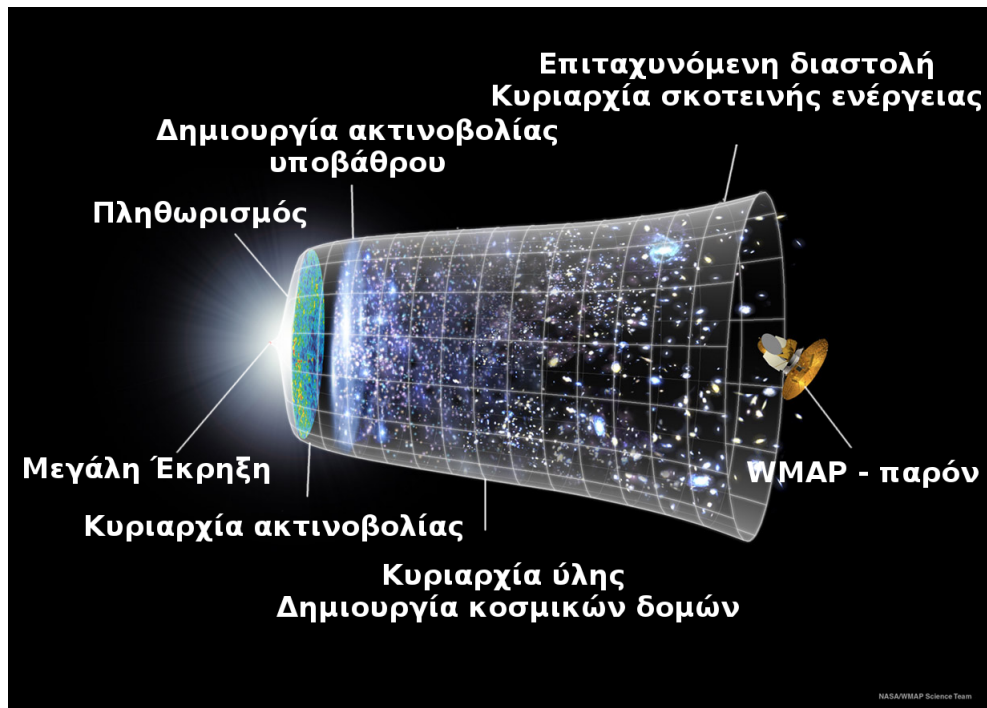
Η Κοσμολογία στηρίζεται σε μερικές βασικές αρχές :

- Γενική Αρχή Σχετικότητας: Οι νόμοι της φύσης παραμένουν οι ίδιοι ως προς όλα τα συστήματα αναφοράς τα οποία επικοινωνούν μεταξύ τους με μετρικές σχέσεις.
- Κοσμολογική Αρχή: Το Σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες είναι ομογενές και ισότροπο. Σε τοπικό επίπεδο ωστόσο το Σύμπαν εμφανίζει ανομοιογένεια.
- Ολογραφική Αρχή: Η περιγραφή ενός φυσικού συστήματος μέσα σε έναν όγκο μπορεί να γίνει με νόμους οι οποίοι αναπτύσσονται στο σύνορο της επιφάνειας.
- Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης: Το Σύμπαν δημιουργήθηκε από τη Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang) και στη συνέχεια άρχισε να διαστέλλεται.

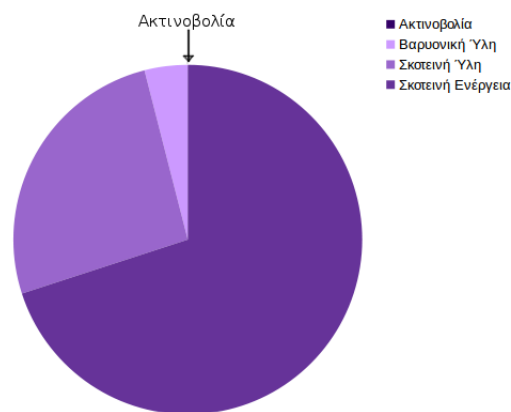
Σύμφωνα με τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, το Σύμπαν ξεκινά από μια υπέρπυκνη και υπέρθερμη κατάσταση (σχήμα 1). Η αιτία που δημιουργήθηκε αυτή η έκρηξη είναι ακόμη άγνωστη και πιθανολογείται ότι η απάντηση βρίσκεται σε μία ενοποιημένη θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Μετά την έκρηξη το Σύμπαν άρχισε να διαστέλλεται διαρκώς αλλά όχι γραμμικά. Κατά την περίοδο του πληθωρισμού (βλ. κεφ. 11) το μέγεθος του Σύμπαντος αυξάνεται με ραγδαίο ρυθμό. Ακολουθεί μια περίοδος κυριαρχίας της ακτινοβολίας κατά την οποία το Σύμπαν διαστέλλεται πιο αργά (380000 έτη μετά τη Μεγάλη Έκρηξη).

Στη συνέχεια το Σύμπαν περνά στην περίοδο κυριαρχίας της ύλης, κατά την οποία δημιουργούνται όλες οι κοσμικές δομές που παρατηρούνται σήμερα: γαλαξίες, σμήνη και υπερσμήνη γαλαξιών. Η περίοδος αυτή διαρκεί περίπου 7 δις έτη. Από παρατηρήσεις γνωρίζουμε πως η ηλικία του Σύμπαντος (μετρούμενη από τη Μεγάλη Έκρηξη) είναι περίπου 14 δις έτη.

Ποια είναι όμως σήμερα τα συστατικά του Σύμπαντος; Στο σχήμα 2 εμφανίζονται σχηματικά. Ένα πολύ μικρό ποσοστό αντιστοιχεί στην ακτινοβολία



Σχήμα 1: Η εξέλιξη του Σύμπαντος μετά τη Μεγάλη Έκρηξη. Εικόνα από NASA/WMAP team.



Σχήμα 2: Τα συστατικά του Σύμπαντος στις μετρούμενες αναλογίες. Η πλειοψηφία απαρτίζεται από τη σκοτεινή ενέργεια και μόλις το 4% αντιστοιχεί στην ύλη που βλέπουμε. Η ακτινοβολία (λχ. ακτινοβολία υποβάθρου) αντιστοιχεί σε ακόμα μικρότερο ποσοστό.

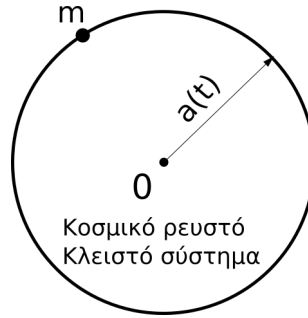
(φωτόνια), το οποίο είναι της τάξης του 10^{-5} της ολικής πυκνότητας. Η φωτεινή ύλη (ή βαρυονική ύλη, που εκπέμπει στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα)

αποτελεί μόλις το 4% των συστατικών του Σύμπαντος, δηλαδή $\frac{\rho_b}{\rho_{tot}} = 0.04$. Ως σκοτεινή ύλη ($\sim 26\%$) ονομάζεται η ύλη που **δεν εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία**, υπακούει ωστόσο στη Νευτώνια βαρύτητα και τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) όπως και η φωτεινή ύλη.

Τέλος, το μεγαλύτερο ποσοστό του Σύμπαντος αποτελείται από τη σκοτεινή ενέργεια η οποία δεν ακτινοβολεί και δεν υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα. Η σκοτεινή ενέργεια ευθύνεται για την επιταχυνόμενη διαστολή που παρατηρείται στο Σύμπαν και το 2011 αποδόθηκε το βραβείο Nobel Φυσικής στους S. Perlmutter, B. Schmidt, A. Riess για την ανακάλυψή της.

2 Κοσμική Δυναμική - Νευτώνια Κοσμολογία

Η μελέτη της δυναμικής του Σύμπαντος γίνεται με τη βοήθεια του παράγοντα κλίμακας (scale factor) $a(t)$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3, το υποθέμα m , αν και σταθερό στο πλέγμα συμμετακινούμενων συντεταγμένων (βλ. κεφάλαιο 4.5), απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων 0 εξαιτίας της διαστολής του Σύμπαντος. Η απομάκρυνση αυτή υπαγορεύεται από τον παράγοντα διαστολής.



Σχήμα 3: Ο παράγοντας διαστολής περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της απόστασης δύο αντικειμένων λόγω της διαστολής του Σύμπαντος. Στο σχήμα φαίνεται η απομάκρυνση του υποθέματος m από το κέντρο 0 που έχει οριστεί ως αρχή του άξονα.

Μελετώντας τη δυναμική του υποθέματος m σε νευτώνια προσέγγιση, ξέρουμε ότι η συνολική ενέργεια E θα ισούται με το άθροισμα κινητικής T και δυναμικής U :

$$\begin{aligned}
 E &= T + U \\
 E &= \frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{GmM_{tot}}{a} \\
 E &= \frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{Gm}{a} \left(\frac{4}{3}\pi\rho a^3 \right) \\
 E &= \frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{4}{3}G\pi m\rho a^2 \\
 \frac{E}{ma^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho \\
 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2E}{ma^2}
 \end{aligned}$$

Εισάγουμε το συμβολισμό $H = \frac{\dot{a}}{a}$, όπου H είναι ο παράγοντας Hubble, που καθορίζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας διαστολής του Σύμπαντος, κα-

θώς και τη χωρική καμπυλότητα της μετρικής του χωρόχρονου (βλ. κεφάλαιο 3.2) ως $K = -\frac{2E}{ma^2}$. Με το νέο συμβολισμό η ανωτέρω εξίσωση γράφεται:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}. \quad (1)$$

Αυτή είναι γνωστή και ως η πρώτη εξίσωση Friedmann και προκύπτει τόσο από τη Νευτώνια προσέγγιση αλλά και από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (βλ. κεφ. 3). Θεωρούμε πως οι μεταβολές που λαμβάνουν χώρα είναι **αδιαβατικές**, δηλαδή το σύστημα δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον: $dQ = 0$. Επομένως, από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο:

$$\begin{aligned} dE + PdV &= dQ \\ c^2dM + PdV &= 0 \\ c^2d\left(\frac{4\pi}{3}\rho a^3\right) + Pd\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right) &= 0 \\ c^2d(\rho a^3) + Pd(a^3) &= 0 \\ c^2\frac{d(\rho a^3)}{dt} + P\frac{d(a^3)}{dt} &= 0 \\ c^2\dot{\rho}a^3 + 3c^2\rho a^2\dot{a} + 3a^2P\dot{a} &= 0 \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

όπου έχουμε εισάγει τον συμβολισμό $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια του παράγοντα Hubble γράφεται:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0, \quad (2)$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση συνέχειας (mass conservation), και δείχνει την εξέλιξη της πυκνότητας των κοσμικών ρευστών.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1) ως προς τον κοσμικό χρόνο έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\dot{a}\ddot{a} &= 2\frac{8\pi G}{3}\rho a\dot{a} + \frac{8\pi G}{3}a^2\dot{\rho} \\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}\left[2\rho a\dot{a} - 3a^2H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό υιοθετούμε το φυσικό σύστημα μονάδων με $c = 1$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} [2\rho a\dot{a} - 3a^2 H(\rho + P)]$$

$$\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3} [2\rho a - 3a(\rho + P)],$$

που οδηγεί στη δεύτερη εξίσωση Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) \quad (3)$$

η οποία δίνει την επιτάχυνση της διαστολής του Σύμπαντος.

Παρατηρήσεις:

- Οι εξισώσεις (1), (2), (3), περιγράφουν όλη τη δυναμική του Σύμπαντος και προκύπτουν και από τη Γενική Θεωρία της σχετικότητας (βλ. κεφ. 3), ωστόσο δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Η διαστολή του Σύμπαντος πειραματικά έχει βρεθεί ότι είναι επιταχυνόμενη. Από τη φαινομενολογία του προβλήματος, προσπαθούμε να καταλάβουμε τι είδους ρευστό προκαλεί την επιτάχυνση.

Ο στόχος της κοσμολογίας είναι η εύρεση των ποσοτήτων $a(t)$, $\rho(t)$, και $P(t)$. Η διαδικασία αυτή απαιτεί κάποιες υποθέσεις:

1. Στο σχήμα 2, η συνεισφορά της ακτινοβολίας είναι αμεληταία ώστε να εμφανιστεί στο γράφημα. Ωστόσο υπήρξε εποχή (εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας - radiation domination era), κατά την οποία η συνεισφορά της ήταν κυρίαρχη και η εξέλιξη διεπόταν από αυτή. Η ακτινοβολία λαμβάνεται υπόψιν μόνο στην περίοδο του πρώιμου Σύμπαντος (early Universe), και θεωρείται αμεληταία σε μετέπειτα χρόνους.
2. Τα κοσμικά ρευστά που μελετάμε είναι πολύ αραιά και συμπεριφέρονται ως ιδανικά. Τα ρευστά αυτά υπακούουν μια βαροτροπική (καταστατική) εξίσωση της μορφής: $P_i \propto \rho_i$, όπου ο δείκτης i αναφέρεται στα διάφορα ρευστά που απαρτίζουν το Σύμπαν.

Συγκεκριμένα θεωρούμε τη συνολική πυκνότητα ως το άθροισμα:

$$\rho_{tot} = \rho = \rho_m + \rho_r + \rho_{DE} \quad (4)$$

όπου $\rho_m = \rho_b + \rho_{DM}$ η συνολική πυκνότητα της ύλης (βαρυονικής $i = b$, και σκοτεινής $i = DM$), ρ_r αντιστοιχεί στην ακτινοβολία και ρ_{DE} στη σκοτεινή ενέργεια.

Από την άλλη η πίεση γράφεται ως :

$$P_{tot} = P = P_m + P_r + P_{DE} \quad (5)$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε :

$$\frac{d(\rho_m + \rho_r + \rho_{DE})}{dt} + 3H(\rho_m + \rho_r + \rho_{DE} + P_m + P_r + P_{DE}) = 0$$

οπότε :

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) + \dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + P_r) + \dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) = 0. \quad (6)$$

3. Τα ρευστά δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η υπόθεση αυτή μας επιτρέπει να αποσυζεύξουμε την εξίσωση (6) στα επιμέρους στοιχεία ως εξής :

- Υλη :

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) = 0 \quad (7)$$

- Ακτινοβολία :

$$\dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + P_r) = 0 \quad (8)$$

- Σκοτεινή Ενέργεια :

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) = 0 \quad (9)$$

Οι τρεις παραπάνω εξισώσεις δείχνουν την εξέλιξη της πυκνότητας των ρευστών του Σύμπαντος στο χρόνο.

3 Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις βασικές αρχές της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) και το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο.

3.1 Τανυστές

Στη ΓΘΣ συναντάται συχνά η έννοια του **τανυστή**, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικευμένο διάνυσμα. Έστω ένα διάνυσμα \vec{x} με συνιστώσες x^i . Θεωρούμε μετασχηματισμό του \vec{x} στο \vec{x}' :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' : x'^i = x^i(x^i) \quad (10)$$

Τα συνήθη διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξης. Ένας τανυστής είναι **ανταλλοίωτος** (contravariant) όταν η σχέση μετασχηματισμού που υπακούν οι συνιστώσες του είναι της μορφής:

$$A'^\beta = \sum_{\alpha=0}^N \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (11)$$

Στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε χρησιμοποιήσει μια βολική σύμβαση, συγκεκριμένα τη σύμβαση άθροισης του Einstein, σύμφωνα με την οποία όταν ένας δείκτης επαναλαμβάνεται, τότε υπονοούμε άθροιση πάνω σε όλα τα στοιχεία του:

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_N x^N = \sum_{i=0}^N a_i x^i = a_i x^i \quad (12)$$

Ως παράδειγμα ανταλλοίωτου τανυστή δίνεται το διαφορικό, το οποίο υπακούει στον κανόνα (11):

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad (13)$$

Αντίθετα, ένας τανυστής λέγεται συναλλοίωτος (covariant) όταν οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται ως:

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta \quad (14)$$

Ένα παράδειγμα συναλλοίωτου τανυστή μπορεί να θεωρηθεί η απλή παράγωγος, η οποία υπακούει τον κανόνα:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}$$

Ένας τανυστής δεν περιορίζεται υποχρεωτικά στη μηδενική (βαθμωτό μέγεθος) και πρώτη τάξη (διάνυσμα), αλλά μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλης τάξης. Ιδιαίτερης σημασίας στην κοσμολογία είναι οι τανυστές δεύτερης τάξης.

Ένας τανυστής δεύτερης τάξης μετασχηματίζεται με αντίστοιχο τρόπο:

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} A^{\gamma\delta} \quad (15)$$

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} A_{\gamma\delta} \quad (16)$$

Ωστόσο οι τανυστές δεύτερης τάξης μπορεί να είναι και μεικτοί, δηλαδή κάποιες συνιστώσες να μετασχηματίζονται συναλλοίωτα και άλλες ανταλλοίωτα:

$$A'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} A^{\gamma}_{\delta} \quad (17)$$

Ένας τανυστής δεύτερης τάξης μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός πίνακα και να συμβολιστεί ως $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ για ανταλλοίωτο και συναλλοίωτο τανυστή αντίστοιχα, ενώ ο μεικτός συμβολίζεται ως $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Το εσωτερικό γινόμενο ενός ανταλλοίωτου διανύσματος με ένα συναλλοίωτο είναι **αναλλοίωτο** μέγεθος, δηλαδή δεν επηρεάζεται από μετασχηματισμούς:

$$A'^{\alpha} A'_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\gamma} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} A_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} A^{\beta} A_{\gamma} = A^{\beta} A_{\beta}$$

όπου δ^{β}_{γ} είναι το δέλτα του Kronecker, $\delta^{\beta}_{\gamma} = \begin{cases} 1, & \beta = \gamma \\ 0, & \beta \neq \gamma \end{cases}$

Ένας βασικός τανυστής στην κοσμολογία είναι ο **μετρικός τανυστής** $g_{\mu\nu}$, ο οποίος ορίζεται μέσω του στοιχειώδους μήκους ds^2 . Το στοιχειώδες μήκος είναι αναλλοίωτο μέγεθος, δεν εξαρτάται δηλαδή από το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων.

$$ds^2 = g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (18)$$

3.1 Τανυστές

Ο μετρικός τανυστής είναι **συμμετρικός**, δηλαδή $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, και στη συναλλοίωτη μορφή του μετασχηματίζεται ως:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Μπορούμε να παραστήσουμε το μετρικό τανυστή με μορφή πίνακα:

$$g_{\mu\nu} \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0N} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N0} & g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ο οποίος είναι ένας πίνακας $(N + 1) \times (N + 1)$. Η ελάχιστη ορίζουσα του πίνακα $g_{\mu\nu}$ δίνεται από τη σχέση $G_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ όπου D_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα $g_{\mu\nu}$ όταν αφαιρεθεί η γραμμή i και η στήλη j .

Ο μετρικός τανυστής συναντάται και σε ανταλλοίωτη μορφή:

$$g^{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu}}{\det(g_{\mu\nu})}. \quad (21)$$

Όταν ο χώρος υπό μελέτη είναι ισοτροπικός τότε ο μετρικός τανυστής είναι διαγώνιος: $g_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$. Στην περίπτωση αυτή, η ορίζουσα D_{ij} θα είναι:

$$D_{ij} = D_{ii} \delta_{ij} = g_{00} g_{11} \cdots g_{(i-1)(j-1)} g_{(i+1)(j+1)} g_{NN} \delta_{ij}$$

και άρα ο ανταλλοίωτος όρος θα είναι:

$$g^{ii} = \frac{(-1)^{2i} g_{00} g_{11} \cdots g_{(i-1)(i-1)} g_{(i+1)(i+1)} g_{NN}}{g_{00} g_{11} \cdots g_{NN}} = \frac{1}{g_{ii}} \quad (22)$$

Ο μετρικός τανυστής μας επιτρέπει να μετατρέπουμε συναλλοίωτες συνιστώσες σε ανταλλοίωτες και αντίστροφα μέσω της σχέσης:

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad (23)$$

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad (24)$$

Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες, όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, υποδηλώνουν άθροισμα και ονομάζονται βουβοί δείκτες. Τέλος, ο στοιχειώδης όγκος επιφάνειας ορίζεται ως:

$$dV_{N+1} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^0 dx^1 \cdots dx^N \quad (25)$$

Εφαρμογή: Να υπολογιστεί ο στοιχειώδης όγκος επιφάνειας σε ιστροπικό ευκλείδιο χώρο δύο διαστάσεων για καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες το στοιχειώδες μήκος δίνεται από τη σχέση $ds_{2D}^2 = dx^2 + dy^2 = d(x^0)^2 + d(x^1)^2$

Ο μετρικός τανυστής είναι:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

άρα $\det(g_{ij}) = 1$.

Επομένως $dV_{2D} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^0 dx^1 = dx^0 dx^1$

Για τις πολικές συντεταγμένες θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού:

$$\begin{aligned} x^0 &= r \cos \theta = x'^0 \cos x'^1 \\ x^1 &= r \sin \theta = x'^0 \sin x'^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{00} &= g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^0} \frac{\partial x^j}{\partial x'^0} \\ g'_{00} &= g_{ii} \frac{\partial x^i}{\partial x'^0} \frac{\partial x^i}{\partial x'^0} \\ g'_{00} &= g_{00} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \right)^2 \\ g'_{00} &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ g'_{00} &= 1 \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το στοιχείο g'_{11} και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g'_{11} &= g_{00} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^1} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \right)^2 \\ g'_{11} &= r^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\ g'_{11} &= r^2 \end{aligned}$$

Δηλαδή $g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x'^0)^2 \end{bmatrix}$

και άρα $\det(g'_{ij}) = (x'^0)^2$, επομένως ο στοιχειώδης όγκος επιφάνειας θα είναι:

$$dV'_{2D} = \sqrt{|\det(g'_{ij})|} dx'^0 dx'^1 = x'^0 dx'^0 dx'^1$$

Ένα πρόβλημα που προκύπτει στην τανυστική ανάλυση είναι ο τελεστής της παραγώγου. Η παράγωγος ενός βαθμωτού μεγέθους παράγει όπως αναφέραμε ένα συναλλοίωτο τανυστή πρώτης τάξης που υπακούει τους συνήθεις μετασχηματισμούς. Αυτό ωστόσο δεν ισχύει σε τανυστές ανώτερης τάξης, καθώς ο μετασχηματισμός τους από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο δεν υπακούει κάποια από τις σχέσεις (11) ή (14). Έτσι, αντί της συνήθους παραγώγου, ορίζεται η **συναλλοίωτη** παράγωγος (ονοματολογία ανεξάρτητη από το συναλλοίωτο τανυστή). Η συναλλοίωτη παράγωγος ταυτίζεται με την κανονική μόνο στην περίπτωση των βαθμωτών μεγεθών, και διατηρεί την παραλληλία των διανυσμάτων, ενώ παράλληλα παράγει έναν τανυστή τάξης κατά μία ανώτερης του αρχικού.

Μερικές ιδιότητες της συναλλοίωτης παραγώγου είναι οι εξής:

- Για βαθμωτά μεγέθη: $\alpha_{;\mu} = \alpha_{,\mu} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$
- Για ανταλλοίωτους τανυστές: $A^\lambda_{;\mu} = A^\lambda_{,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu$
- Για συναλλοίωτους τανυστές: $A_{\lambda;\mu} = A_{\lambda,\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu$
- Η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι 0.

όπου ως $A^\lambda_{;\mu}$ συμβολίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος ενώ ως $A^\lambda_{,\mu}$ η συνήθης παράγωγος.

Αυτοί οι κανόνες γενικεύονται στην περίπτωση ανώτερης τάξης τανυστή. Οι ποσότητες $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ που εμφανίζονται ονομάζονται σύμβολα Christoffel και υπολογίζονται από τη μετρική μέσω της σχέσης:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (27)$$

3.2 Βασικές Μετρικές - Μετρική Friedmann Robertson Walker (FRW)

Μερικές βασικές μετρικές και οι αντίστοιχες σχέσεις ελάχιστου μήκους συνοψίζονται παρακάτω:

1. Δισδιάστατος ευκλείδειος χώρος:

$$ds^2_{2D} = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.2 Βασικές Μετρικές - Μετρική Friedmann Robertson Walker (FRW)

2. Τρισδιάστατος ευκλείδιος χώρος:

$$ds_{3D}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

3. Χώρος Minkowski (χωρόχρονος Minkowski): Παρόλο που η Νευτώνια φυσική περιγράφεται πλήρως στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, η σχετικότητα λαμβάνει χώρο σε τετραδιάστατο χώρο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο χωρόχρονος Minkowski της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 + ds_{3D}^2$$

4. Η Μετρική Μετρική Friedmann Robertson Walker (FRW).

Η σχέση ελάχιστου μήκους για τη μετρική αυτή σε πολικές συντεταγμένες γράφεται ως:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (28)$$

όπου K είναι η χωρική καμπυλότητα.

Ορίζουμε το **σύμμορφο** χρόνο (conformal time)

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (29)$$

Με τη βοήθεια του οποίου η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (30)$$

Επιστρέφοντας στον κοσμικό χρόνο t , τα στοιχεία της μετρικής είναι¹:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-c^2, \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \right)$$

¹Χρησιμοποιούμε επίσης το σύστημα μονάδων όπου $c \equiv 1$, οπότε συχνά η μετρική εμφανίζεται με τη μορφή

$$g_{\mu\nu} \text{diag} \left(-1, \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \right)$$

3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.2 Βασικές Μετρικές - Μετρική Friedmann Robertson Walker (FRW)

Ας αναφέρουμε τώρα μερικές γεωμετρικές ιδιότητες της μετρικής FRW. Η σχέση ελαχίστου μήκους μπορεί να αναλυθεί στο χρονικό και το χωρικό κομμάτι ως εξής:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \quad (31)$$

όπου η ποσότητα dl^2 περιλαμβάνει τη χωρική διαστολή:

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{1}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (32)$$

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της μετρικής για τρεις περιπτώσεις:

- Επίπεδος (Ευκλείδειος) χώρος (flat space), $K = 0$:

Για λόγους συνέπειας με τα επόμενα, χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $r = \chi$ και η σχέση (32) γίνεται:

$$dl^2 = a^2(t)[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (33)$$

Το στοιχείο επιφάνειας για σταθερό χ δίνεται από τη σχέση:

$$dS_f = a^2(t)\chi^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (34)$$

οπότε η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας χ θα είναι:

$$S_f = 4\pi a^2 \chi^2 \quad (35)$$

ενώ ο στοιχειώδης όγκος:

$$dV_f = a^3(t)\chi^2 \sin \theta d\chi d\theta d\phi \quad (36)$$

με αντίστοιχο όγκο σφαίρας ακτίνας χ :

$$V_f = \frac{4\pi}{3} a^3(t)\chi^3 \quad (37)$$

- Κλειστός χώρος πεπερασμένου όγκου (Υπερσφαίρα - closed space):

σε αντιστοιχία με τον επίπεδο χώρο, ορίζουμε τώρα τη μεταβλητή $r = \sin \chi$ ώστε η σχέση (32) να μετατρέπεται σε:

$$dl^2 = a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (38)$$

ενώ οι αντίστοιχες σχέσεις για το στοιχείο επιφάνειας και όγκου:

3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.2 Βασικές Μετρικές - Μετρική Friedmann Robertson Walker (FRW)

$$dS_c = a^2 \sin^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi \quad (39)$$

$$dV_c = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi \quad (40)$$

Τα οποία όταν ολοκληρώνονται:

$$S_c = 4\pi a^2 \sin^2 \chi \leq S_f \quad (41)$$

$$V_c = \frac{2\pi}{3} a^3 \left(\chi - \frac{\sin(2\chi)}{2} \right) \quad (42)$$

Η επιφάνεια σφαίρας είναι μέγιστη για $\chi = \frac{\pi}{2}$ όπου $S_{c,max} = S_f = 4\pi a^2$ ενώ αντίθετα ο όγκος μεγιστοποιείται για $\chi = \pi$ δηλαδή $V_{c,max} = 2\pi^2 a^3$.

- Ανοικτός (υπερβολικός - open) χώρος $K = -1$.

Ο ανοικτός χώρος μπορεί να είναι άπειρος όπως και ο όγκος του. Οι σχέσεις που αναφέραμε για τις παραπάνω περιπτώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

Για $r = \sinh \chi$:

$$dl^2 = a^2(t)[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (43)$$

$$dS_o = a^2(t) \sinh^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi \quad (44)$$

$$dV_o = a^3(t) \sinh^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi \quad (45)$$

$$S_o = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi \quad (46)$$

$$V_o = 2\pi a^3 \left(-\chi + \frac{\sinh(2\chi)}{2} \right) \quad (47)$$

Γενικά ισχύει ότι $S_c \leq S_f \leq S_o$ και $V_c \leq V_f \leq V_o$.

Το Σύμπαν από παρατηρήσεις φαίνεται να έχει χωρική καμπυλότητα $K = 0$, είναι δηλαδή επίπεδο (ευκλείδειο) ως προς το χωρικό του μέρος, εμβαπτισμένο ως προς το χωρόχρονο που είναι καμπύλο.

3.3 Εξισώσεις πεδίου του Einstein

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein συνδέουν τη γεωμετρία του χώρου με τις φυσικές του ιδιότητες. Το κομμάτι της γεωμετρίας εισέρχεται στις εξισώσεις ως μεγέθη παράγωγα από τη μετρική του χωρόχρονου, συγκεκριμένα τον τανυστή Ricci καθώς και το βαθμωτό πεδίο Ricci, το οποίο σχετίζεται με την καμπυλότητα του χωρόχρονου. Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως η καμπυλότητα K αφορά τη χωρική καμπυλότητα, η οποία εκφράζει τη γεωμετρία του χώρου και δεν εξαρτάται από το χρόνο. Η χωρική καμπυλότητα μπορεί να πάρει τιμές $K = \{-1, 0, +1\}$ καθεμία από τις οποίες αναλύθηκε προηγουμένως. Η χρονοεξαρτώμενη ποσότητα $K_4 = K_4(t) = K_4(H)$ η οποία είναι **θετική**. Ο τανυστής Ricci ορίζεται με τη χρήση των συμβόλων Christoffel (27):

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \quad (48)$$

Το βαθμωτό πεδίο Ricci R ορίζεται ως: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ όπου γίνεται χρήση της σύμβασης άθροισης του Einstein.

Το κομμάτι των φυσικών ιδιοτήτων του χωρόχρονου περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}$. Για ένα ιδανικό ρευστό, ο τανυστής ενέργειας ορμής δίνεται από τη σχέση:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^{\mu}U^{\nu} - Pg^{\mu\nu} \quad (49)$$

όπου $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ είναι το διάνυσμα της τετραταχύτητας του ρευστού στο αδρανειακό σύστημα του ρευστού.

Είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (50)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τις συνιστώσες του τανυστή Ricci για τη μετρική FRW:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3(H^2 + \dot{H}) \\ R_{i0} &= R_{0i} = 0 \\ R_{ij} &= \left(3H^2 + \dot{H} + \frac{2K}{a^2} \right) g_{ij} \end{aligned}$$

Το βαθμωτό μέγεθος Ricci δίνεται από τη σχέση:

$$R = 6 \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{K}{a^2} \right)$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής δίνονται από την (49) και είναι $T_0^0 = -\rho$ και $\frac{1}{3}T_i^i = P$.

Επιστρέφουμε τώρα στη σχέση (50):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Ξεκινώντας από τη συνιστώσα $\{\mu\nu\} = \{00\}$, η σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 8\pi GT_{00} \\ R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= 8\pi GT_{00} \\ -3(H^2 + \dot{H}) + 3\left(2H^2 + \dot{H} + \frac{K}{a^2(t)}\right) &= 8\pi G\rho \\ 3H^2 + \frac{3K}{a^2(t)} &= 8\pi G\rho, \quad \text{δηλαδή} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2(t)} \end{aligned} \quad (51)$$

καταλήγουμε δηλαδή στην εξίσωση (1), αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Για το χωρικό κομμάτι των εξισώσεων, δηλαδή τους δείκτες $\{\mu\nu\} = \{ij\}$ ², από την εξίσωση (50) έχουμε:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= 8\pi GT_{ij} \\ R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} &= 8\pi GT_{ij} \\ \left(3H^2 + \dot{H} + \frac{2K}{a^2}\right) g_{ij} - 3\left(2H^2 + \dot{H} + \frac{K}{a^2}\right) g_{ij} &= 8\pi GPg_{ij} \\ -3H^2 - 2\dot{H} - \frac{K}{a^2} &= 8\pi GP \\ 2(H^2 + \dot{H}) + \left[H^2 + \frac{K}{a^2}\right] &= 8\pi GP \\ 2(H^2 + \dot{H}) + \frac{8\pi G}{3}\rho &= 8\pi GP \\ H^2 + \dot{H} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \end{aligned} \quad (52)$$

ή διαφορετικά

²Οι ελληνικοί δείκτες χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τετραδιανύσματα: $\{\mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3\}$, ενώ οι λατινικοί για τα κλασικά τρισδιάστατα διανύσματα: $\{i, j\} = \{1, 2, 3\}$

3.3 Εξισώσεις πεδίου του Einstein

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (53)$$

η οποία είναι η δεύτερη εξίσωση Friedmann (3), αλλά έχει εξαχθεί από τη ΓΘΣ.

Ας επιστρέψουμε στην εξίσωση (51):

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - K \\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}(2a\dot{\rho} + a^2\dot{\rho}) \\ \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3}\left(2\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{\rho}\right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αρχικά $\frac{\dot{a}}{a} = H$ αλλά και την εξίσωση (53), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H \left[-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \right] &= \frac{4\pi G}{3}(2H\rho\dot{\rho}) \\ -H(\rho + 3P) &= 2H\rho\dot{\rho} \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + P) &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Η εξίσωση συνέχειας στα πλαίσια της ΓΘΣ μπορεί να προκύψει και από τις εξισώσεις πεδίου (50), με την απαίτηση να μηδενίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή ενέργειας ορμής: $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$.

4 Παρατηρούμενα Μεγέθη

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με παρατηρούμενα μεγέθη, τα οποία αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο της θεμελίωσης των θεωριών της κοσμολογίας.

4.1 Ερυθρομετάθεση (redshift) z

Η ερυθρομετάθεση, όπως δηλώνει και το όνομα της μεταβλητής, περιγράφει τη μετάθεση του φάσματος προς το ερυθρό:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (55)$$

όπου $\lambda_{e,o}$ είναι το μήκος κύματος κατά την εκπομπή και παρατήρηση αντίστοιχα. Η ερυθρομετάθεση, παρότι συνήθως ποσότητα στη μελέτη φασμάτων, στην περίπτωση της κοσμολογίας προκαλείται λόγω της απομάκρυνσης αντικειμένων λόγω διαστολής του Σύμπαντος.

Θεωρούμε τη μετρική FRW (28). Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_e εκπέμπεται μια φωτεινή ακτίνα από πηγή στη θέση $r = 0$. Σε μεταγενέστερο χρόνο t_o θα έχει φτάσει στη θέση r . Τα φωτόνια κινούνται στις λεγόμενες φωτοειδείς γεωδαισιακές (null geodesics):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] = 0 \quad (56)$$

Θεωρούμε σφαιρική συμμετρία: $d\theta = d\phi = 0$, επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} -c^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2} dr^2 &= 0 \\ \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = F(r) \end{aligned} \quad (57)$$

Έστω λοιπόν δεύτερη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται σε χρόνο $t_e + \delta t_e$. Η παρατήρησή της θα γίνει σε χρόνο $t_o + \delta t_o$.

$$F(r) = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} \quad (58)$$

Μεταξύ της εκπομπής και παρατήρησης, το Σύμπαν θα έχει διασταλεί. Η ιδιοαπόσταση (proper distance) θα παραμείνει η ίδια:

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}$$

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{cdt}{a(t)}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε πως οι χρόνοι $\delta t_o, \delta t_e$ είναι απειροστοί τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}$$

$$\nu_o a_o = \nu_e a$$

$$a = \frac{\nu_o}{\nu_e} a_o$$

$$a = \frac{\lambda_e}{\lambda_o} a_o$$

$$a(z) = \frac{a_o}{1+z} \quad (59)$$

Συνήθως κανονικοποιούμε τον παράγοντα κλίμακας σήμερα στη μονάδα: $a_o = a(t_o) = 1$ το οποίο δίνει τη σχέση για την ερυθρομετάθεση:

$$a(z) = \frac{1}{1+z} \quad (60)$$

4.2 Σταθερά του Hubble

Θεωρούμε σύστημα αναφοράς σε διαστελλόμενο Σύμπαν στη θέση $O(0, 0)$, και ένα αντικείμενο K στη θέση \vec{r} . Το διάνυσμα θέσης μπορεί να γραφεί ως $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ όπου το διάνυσμα \vec{x} δεν επηρεάζεται από τη διαστολή του Σύμπαντος αλλά μόνο τη σχετική ταχύτητα του αντικειμένου ως προς το σύστημα αναφοράς. Οι συντεταγμένες \vec{x} λέγονται και συμμετακινούμενες συντεταγμένες (comoving coordinates). Η ταχύτητα απομάκρυνσης του αντικειμένου K θα είναι:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}}$$

$$\dot{\vec{r}} = aH\vec{x} + a\dot{\vec{x}}$$

$$\dot{\vec{r}} = H\vec{r} + \vec{v}_p \quad (61)$$

όπου \vec{v}_p είναι η σχετική ταχύτητα του αντικειμένου ανεξαρτήτως διαστολής. Σε τοπικό επίπεδο, η διαστολή θεωρείται αμεληταία, ωστόσο σε κοσμολογικό επίπεδο ισχύει $|\vec{v}_p| \ll H|\vec{r}|$. Για μεγάλες ερυθρομεταθέσεις, χρησιμοποιώντας την τιμή $H = H_0$ παίρνουμε

$$\dot{\vec{r}} \simeq H_0|\vec{r}| \quad (62)$$

Μετρώντας λοιπόν την ταχύτητα απομάκρυνσης πολύ μακρινών αντικειμένων, σε συνδυασμό με την απόστασή τους από τη θέση παρατήρησης, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς Hubble. Τα αποτελέσματα από το τηλεσκόπιο Hubble (Hubble Space Telescope HST) δίνει $H_0 = 73.48 \pm 1.66 \text{ km/s/Mpc}$. Αντίθετα, ο δορυφόρος του Planck δίνει $H_0 = 67.36 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc}$. Μέσω της σταθεράς του Hubble μπορούμε να ορίσουμε και τις παρακάτω ποσότητες:

- Χρόνος Hubble

$$t_H = H_0^{-1} \simeq \frac{9.78}{h} \text{ Gyr} \quad (63)$$

$$t_H = 13.7 - 13.9 \text{ Gyr} \quad (64)$$

- Ακτίνα Hubble

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1} \text{ Mpc} \quad (65)$$

Σχέσεις μεταξύ κοσμικών μεταβλητών

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{da}{dt} = aH \quad (66)$$

$$a = \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt} \quad (67)$$

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)^2 \frac{da}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z) \quad (68)$$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H(z)}, \quad \text{ή} \quad (69)$$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0(1+z)E(z)} \quad (70)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την κανονικοποιημένη συνάρτηση Hubble $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$.

4.3 Ένδειξη απόστασης

Η ένδειξη απόστασης (distance modulus) χρησιμοποιείται παραδοσιακά στην αστρονομία. Είναι γνωστό πως μια πηγή φαίνεται αμυδρότερη καθώς απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Η ένδειξη απόστασης βασίζεται στη χρήση του φαινόμενου μεγέθους m , που ορίζεται μέσω της σχέσης Webber:

$$m = B \log l + c \quad (71)$$

όπου οι ποσότητες B και c είναι σταθερές, και l είναι η φωτεινότητα του αντικειμένου. Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να δει φαινόμενα μεγέθη $0 \leq m \leq 6$, όπου το μικρό μέγεθος αντιστοιχεί σε λαμπρό αστέρα και μεγάλο μέγεθος αντιστοιχεί σε αμυδρό αστέρα. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι οι τοπικοί γαλαξίες έχουν φαινόμενα μεγέθη $m \sim 13 - 14$, και ο Ήλιος $m_{\odot} = -27$.

Για τον υπολογισμό των σταθερών B και c , συγκρίνουμε δύο αστέρες γνωστών παραμέτρων. Έχει παρατηρηθεί ότι ένας αστέρας μεγέθους $m = 1$ (λαμπρός) είναι στην πραγματικότητα 100 φορές λαμπρότερος από έναν αστέρα μεγέθους $m = 6$ (αμυδρός.)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (71) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= B \log l_1 + c \\ m_2 &= B \log l_2 + c \end{aligned} \right\} m_2 - m_1 = B(\log l_2 - \log l_1)$$

$$m_2 - m_1 = B \log \frac{l_2}{l_1}$$

$$6 - 1 = B \log \frac{1}{100}$$

$$B = -2.5$$

κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε τη σχέση:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \frac{l_2}{l_1} \quad (72)$$

Ορίζουμε ως απόλυτο μέγεθος M , το φαινόμενο μέγεθος που θα είχε ένα αντικείμενο εάν παρατηρούνταν από απόσταση $d = 10pc$. Ορίζουμε επίσης τη λαμπρότητα του αντικειμένου L , μέσω της σχέσης $l = F = \frac{L}{4\pi d^2}$. Συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται μονάδες CGS, οπότε η λαμπρότητα μετριέται σε $[L] = erg \cdot sec^{-1}$, ενώ η φωτεινότητα σε $[l] = erg \cdot sec^{-1} cm^{-2}$. Σε σύγκριση με τα

προηγούμενα, το απόλυτο μέγεθος των τοπικών γαλαξιών είναι της τάξης του $M \sim -22, -23$, ενώ του Ηλίου είναι $M_{\odot} = 4.7$.

Θεωρούμε δύο αστέρες ίδιας λαμπρότητας, αλλά σε αποστάσεις d_1 και d_2 . Η σχέση (72) γίνεται:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= 2.5 \log \frac{l_1}{l_2} \\ m_2 - m_1 &= 2.5 \log \frac{\frac{L}{4\pi d_1^2}}{\frac{L}{4\pi d_2^2}} \\ m_2 - m_1 &= 5 \log \frac{d_2}{d_1} \end{aligned} \quad (73)$$

Εάν ο αστέρας 2 βρίσκεται σε απόσταση $10pc$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$m - M = -5 \log \left(\frac{d}{pc} \right) + 5 \quad (74)$$

Στην κοσμολογία συνηθίζεται να μετράμε αποστάσεις (Mpc) σε μεγαλύτερη κλίμακα και κατά συνέπεια η σχέση αυτή γράφεται:

$$m - M = -5 \log \left(\frac{d}{Mpc} \right) + 25 \quad (75)$$

Η σχέση αυτή έχει κυρίαρχο ρόλο στην Κοσμολογία. Χρησιμοποιείται εκτενώς στη μελέτη δεδομένων Supernova τύπου Ia. Ενδεικτικά, το νέφος του Μαγγελάνου βρίσκεται σε απόσταση $d = 0.05Mpc$ και άρα η ένδειξη απόστασής του είναι $m - M = 18.1$. Αντίστοιχα, το σμήνος της Παρθένου είναι σε απόσταση $d = 15Mpc$ και έχει ένδειξη απόστασης $m - M = 38.1$.

4.4 Παράγοντας Επιβράδυνσης

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της διαστολής (συστολής) του Σύμπαντος στο πρόσφατο παρελθόν και το κοντινό μέλλον, μπορούμε να αναπτύξουμε τον παράγοντα κλίμακας κατά Taylor γύρω από την τιμή $t = t_0$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{a}(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \\ \frac{a(t)}{a(t_0)} &= 1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2 \frac{(t - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον παράγοντα επιβράδυνσης ως:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (76)$$

ο οποίος για τη σημερινή εποχή παίρνει τιμή $q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}$. Είναι λογικό πως $\ddot{a} > 0$ τότε μιλάμε για επιταχυνόμενη διαστολή ($q < 0$), ενώ για $\ddot{a} < 0$ μιλάμε για επιβράδυνση ($q > 0$).

Από τη σχέση (76) γράφουμε:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{a^2 \ddot{a}}{\dot{a}^2 a} \\ q &= -\frac{1}{H^2} (H^2 + \dot{H}) \\ q &= -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) \\ q &= -\left(1 + \frac{dH}{da} \frac{da}{dt}\right) \\ q &= -\left(1 + \frac{dH}{da} \frac{a}{H}\right). \end{aligned}$$

4.5 Κοσμικές αποστάσεις

Ονομάζουμε συμμετακινούμενες τις συντεταγμένες οι οποίες παραμένουν σταθερές κατά τη διαστολή του Σύμπαντος. Παρατηρητές σε σταθερές συμμετακινούμενες συντεταγμένες, αντιλαμβάνονται το Σύμπαν ως ομογενές και ισότροπο. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του κεφαλαίου 4 για την τροχιά των φωτονίων. Όπως αναφέρθηκε, τα φωτόνια κινούνται σε φωτοειδείς γεωδαισιακές $ds^2 = 0$, και εξετάζοντας μόνο το ακτινικό κομμάτι της κίνησης, θέτουμε $d\theta = d\phi = 0$. Επομένως:

$$\begin{aligned} 0 &= -c^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2} dr^2 \\ \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} &= c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \\ \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} &= c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \\ \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} &= \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \end{aligned} \quad (77)$$

Διαχωρίζουμε τις περιπτώσεις ανάλογα με την καμπυλότητα:

- $K = 0$: Το αριστερό ολοκλήρωμα απλοποιείται σε:

$$r(z) = d_p = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (78)$$

όπου $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$ η κανονικοποιημένη συνάρτηση Hubble.

- $K = +1$ (κλειστά χωρία): Σε αυτήν την περίπτωση από τη σχέση (38) έχουμε:

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-r'^2}} = \int_0^{\sin \chi} \frac{d\chi \cos \chi}{\sqrt{1-\sin^2 \chi}}$$

Οπότε θέτοντας $r = d_p = \sin \chi$

$$d_p = \sin \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (79)$$

Ορίζουμε ως παράγοντα κλίμακας της καμπυλότητας την ποσότητα:

$$\Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{H_0^2} \quad (80)$$

με τη βοήθεια της οποίας γράφουμε:

$$d_p = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \sin \left[\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (81)$$

- $K = -1$ (ανοικτά χωρία): Με όμοια διαδικασία με την ανωτέρω βρίσκουμε:

$$d_p = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \sinh \left[\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (82)$$

4.6 Απόσταση λαμπρότητας

Μία μέθοδος μέτρησης της απόστασης που υιοθετήθηκε από την αστρονομία, είναι η απόσταση λαμπρότητας d_L . Η απόσταση λαμπρότητας ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (83)$$

Πώς σχετίζεται η απόσταση λαμπρότητας με την ιδιοαπόσταση r ; Σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν η απόσταση λαμπρότητας δεν ταυτίζεται με την ιδιοαπόσταση των αντικειμένων. Υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει δύο φωτόνια με χρονική διαφορά δt_e . Τα φωτόνια αυτά θα φτάσουν στον παρατηρητή σε απόσταση r σε χρόνο $\delta t_o = (1+z)\delta t_e$.

Η λαμπρότητα της πηγής είναι ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας της πηγής, δηλαδή είναι η ενέργεια του ενός φωτονίου $\left(\frac{hc}{\lambda_e}\right)$ επί τη συχνότητα παραγωγής τους $\left(\frac{n}{\delta t_e}\right)$. Τα φωτόνια υπόκεινται περαιτέρω ερυθρομετάθεση από την εκπομπή ως την παρατήρησή τους, και άρα $\lambda_o = \lambda_e(1+z)$. Σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν, δύο φωτόνια που εκπέμπονται με χρονική διαφορά δt_e , θα παρατηρούνται με χρονική διαφορά $\delta t_o = \delta t_e(1+z)$, οπότε η λαμπρότητα της πηγής θα είναι:

$$L_e = \frac{n hc}{\delta t_e \lambda_e} \quad (84)$$

Η ενέργεια των φωτονίων όπως μετράται από τον παρατηρητή είναι: $E_o = \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{hc}{\lambda_e(1+z)}$ Στη θέση του παρατηρητή, μετράμε τη ροή της πηγής³:

$$\begin{aligned} F &= \frac{L_o}{4\pi r^2} \\ F &= \frac{n hc}{\delta t_o \lambda_o} \frac{1}{4\pi r^2} \\ F &= \frac{n}{\delta t_e(1+z)} \frac{hc}{\lambda_e(1+z)} \frac{1}{4\pi r^2} \\ F &= \frac{n hc}{\delta t_e \lambda_e} \frac{1}{4\pi [r(1+z)]^2} \end{aligned} \quad (85)$$

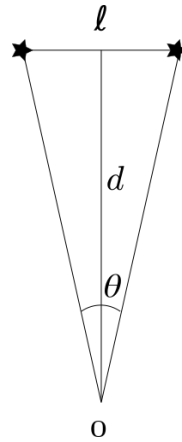
Συγκρίνοντας λοιπόν την (83) με την (85) παίρνουμε τελικά:

$$d_L(z) = (1+z)r(z). \quad (86)$$

4.7 Γωνιακή απόσταση

Θεωρούμε αντικείμενο σε ιδιοαπόσταση $r(z)$ από παρατηρητή. Το αντικείμενο έχει γνωστή γραμμική διάσταση ℓ , και μετράμε το γωνιακό του μέγεθος θ .

³Ο ορισμός προκύπτει από ένα επίπεδο μη διαστελλόμενο σύμπαν όπου η ροή είναι ίση με τη λαμπρότητα (ρυθμός παραγωγής ενέργειας) δια την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r .



Σχήμα 4: Η γωνιακή απόσταση d_A αντικειμένου γραμμικής διάστασης ℓ και γωνιακού μεγέθους θ από παρατηρητή στη θέση O .

Η γωνιακή απόσταση d_A ενός αντικειμένου, όπως μετράται σε ένα επίπεδο και μη διαστελλόμενο σύμπαν, ορίζεται ως:

$$d_A = \frac{\ell}{\theta} \quad (87)$$

Όταν η πηγή εξέπεμψε το σήμα, το Σύμπαν βρισκόταν σε ερυθρομετάθεση z . Κατά συνέπεια η διάσταση ℓ , για μικρή τιμή του θ θα είναι $\ell = \frac{r(z)}{1+z}\theta$. Άρα, συγκρίνοντας με την (87), θα είναι:

$$\begin{aligned} d_A &= \frac{\frac{r(z)\theta}{1+z}}{\theta} \\ d_A &= \frac{r(z)}{1+z} \end{aligned} \quad (88)$$

Κατά συνέπεια, από τη σχέση (86) βλέπουμε ότι ισχύει:

$$d_L = (1+z)^2 d_A \quad (89)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για πολύ μικρή ερυθρομετάθεση ($z \ll 1$), οι τρεις αποστάσεις είναι περίπου ίσες:

$$r(z) \sim d_L(z) \sim d_A(z) \quad (90)$$

Η διαφορά τους γίνεται σε μεγάλες ερυθρομετατοπίσεις (πολύ μακρινούς γαλαξίες, μακρινό παρελθόν).

5 Μοντέλα Σύμπαντος

Η μελέτη του Σύμπαντος γίνεται αντιμετωπίζοντας τα συστατικά του ως ιδανικά (αραιά) ρευστά. Ξεκινάμε την ανάλυση με την υπόθεση ενός μόνο ιδανικού ρευστού f (single component universe), το οποίο υπακούει μια καταστατική εξίσωση της μορφής:

$$P_f = w_f \rho_f \quad (91)$$

δηλαδή η πίεση P_f είναι ανάλογη της πυκνότητας ρ_f με σταθερά αναλογίας τον παράγοντα καταστατικής εξίσωσης w_f ο οποίος εξαρτάται από τις ιδιότητες του ρευστού.

5.1 Δυναμική εξέλιξη

Η εξίσωση (54) για ένα ρευστό f γράφεται:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + P_f) &= 0 \\ \dot{\rho}_f + 3H\rho_f(1 + w_f) &= 0 \\ \frac{d\rho_f(t)}{dt} + 3\frac{da(t)}{dt}\frac{\rho_f(t)}{a}(1 + w_f) &= 0 \end{aligned} \quad (92)$$

οπότε ολοκληρώνοντας:

$$\begin{aligned} \int_{\rho_{f,0}}^{\rho_f} \frac{d\rho'_f}{\rho'_f} &= -3(1 + w_f) \int_{a_0}^a \frac{da'}{a'} \\ \rho_f(a) &= \rho_{f,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_f)} \end{aligned} \quad (93)$$

Συνήθως επιλέγεται ως οριακή τιμή η σημερινή και γράφουμε $\rho_{f,\text{today}} = \rho_{f,0}$ ενώ για τον παράγοντα κλίμακας $a_{\text{today}} = a_0 = 1$. Κατά συνέπεια, η εξέλιξη της πυκνότητας θα ακολουθεί το νόμο:

$$\rho_f = \rho_{f,0} a^{-3(1+w_f)} \quad (94)$$

Σε επίπεδο σύμπαν η πρώτη εξίσωση Friedmann (51) δίνει:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_f \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{f,0} a^{-3(1+w_f)} \\
\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{f,0} a^{-1-3w_f} \\
\int_0^a a'^{\frac{1+3w_f}{2}} da' &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{f,0}} \int_0^t dt' \\
\int_0^a a'^{\frac{1+3w_f}{2}} da' &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{f,0}} t \\
\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{f,0}} t &= \frac{2}{3(1+w_f)} a^{\frac{3(1+w_f)}{2}},
\end{aligned}$$

οπότε αν χρησιμοποιήσουμε τη σημερινή τιμή για τον παράγοντα κλίμακας, παίρνουμε την ηλικία του Σύμπαντος⁴ όταν αυτό αποτελείται αποκλειστικά από το ρευστό f .

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w_f)} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_{f,0}}} \quad (95)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0(1+w_f)}. \quad (96)$$

Από τον ορισμό της ερυθρομετάθεσης $a = \frac{1}{1+z}$, γράφουμε:

$$t(z) = t_0(1+z)^{-\frac{3(1+w_f)}{2}} \quad (97)$$

Αντίστοιχα, ο παράγοντας κλίμακας γράφεται συναρτήσει του κοσμικού χρόνου:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w_f)}} \quad (98)$$

ενώ η συνάρτηση Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w_f)t} \quad (99)$$

$$H(z) = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}(1+w_f)} \quad (100)$$

⁴Στην πραγματικότητα το Σύμπαν αποτελείται από συνδυασμό περισσότερων ρευστών και ο υπολογισμός της ηλικίας του είναι πιο περίπλοκος, όπως θα συζητηθεί στο κεφάλαιο 6

Τέλος, ο παράγοντας επιτάχυνσης q θα είναι ίσος με :

$$\begin{aligned}
 q &= - \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \\
 q &= - \left(1 + \frac{-\frac{2}{3(1+w_f)t^2}}{\frac{1}{9(1+w_f)^2t^2}} \right) \\
 q &= \left(1 - \frac{3(1+w_f)}{2} \right) \\
 q &= \frac{1+3w_f}{2} \tag{101}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο παράγοντας επιτάχυνσης σε ένα σύμπαν αποτελούμενο από ένα μόνο ρευστό είναι σταθερός.

5.2 Μη σχετικιστική ύλη

Το καθιερωμένο πρότυπο μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1990 ήταν ένα σύμπαν αποτελούμενο αποκλειστικά από ύλη, το λεγόμενο μοντέλο Einstein-de-Sitter - EdS. Στο συγκεκριμένο μοντέλο το ρευστό που απαρτίζει το σύμπαν αποτελείται από μη σχετικιστικά σωματίδια ανηγμένης μάζας μ . Το πρότυπο αυτό περιγράφει αρκετά καλά την περίοδο κυριαρχίας της ύλης ($z \sim 3000$ έως $z \sim 1$) Σε αυτή την περίπτωση η καταστατική εξίσωση έχει τη μορφή :

$$P_m = \frac{kT}{\mu c^2} \rho_m \tag{102}$$

Το ρευστό αυτό καλείται **σκοτεινή ή ψυχρή ύλη** καθώς η ταχύτητα των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Η θερμική ενέργεια των σωματιδίων θα είναι :

$$kT = \frac{\mu \langle v^2 \rangle}{3} \tag{103}$$

οπότε η καταστατική εξίσωση γίνεται :

$$P_m = \frac{\mu \langle v^2 \rangle}{3\mu c^2} = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \ll 1 \tag{104}$$

οπότε τελικά :

$$P_m = 0 \tag{105}$$

και κατά συνέπεια

$$w_m = 0 \quad (106)$$

Στο μοντέλο αυτό οι σχέσεις (96)-(101) γίνονται:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (107)$$

$$t(z) = t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (108)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (109)$$

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (110)$$

$$H(z) = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}} \quad (111)$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad (112)$$

ενώ η (94) δίνει:

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0}a^{-3} \quad (113)$$

5.3 Σχετικιστικά σωματίδια

Επόμενη περίπτωση είναι το ρευστό να αποτελείται από σχετικιστικά σωματίδια (αέριο φωτονίων - photon gas) όπου το Σύμπαν ακτινοβολεί ως μέλαν σώμα. Η καταστατική εξίσωση σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (114)$$

$$w_r = \frac{1}{3} \quad (115)$$

Συνεπώς οι κοσμολογικές ποσότητες που μας ενδιαφέρουν γίνονται:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \quad (116)$$

$$t(z) = t_0(1+z)^{-2} \quad (117)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (118)$$

$$H(t) = \frac{1}{2t} \quad (119)$$

$$H(z) = H_0(1+z)^2 \quad (120)$$

$$q = 1 \quad (121)$$

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0}a^{-4} \quad (122)$$

Το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να περιγράψει ολόκληρη την ιστορία του Σύμπαντος, περιγράφει όμως ικανοποιητικά την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας (radiation era) όταν δηλαδή $z > 3000$.

5.4 Καμπυλότητα - Σύμπαν Milne

Το σύμπαν Milne, γνωστό και ως κενό σύμπαν, δεν περιέχει κάποιο ρευστό αλλά η καμπυλότητά του είναι μη μηδενική. Σε αυτή την περίπτωση η πρώτη εξίσωση Friedmann γίνεται:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{|K|}{a^2} \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{|K|}{a^2} \\ \dot{a} &= \sqrt{|K|} \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να περιγράψουμε την καμπυλότητα ως κοσμικό ρευστό με παράγοντα καταστατικής εξίσωσης $w_K = -\frac{1}{3}$. Άρα στο σύμπαν Milne έχουμε:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \quad (123)$$

$$t(z) = \frac{t_0}{1+z} \quad (124)$$

$$a(t) = \frac{t}{t_0} \quad (125)$$

$$H(t) = \frac{1}{t} \quad (126)$$

$$H(z) = \frac{H_0}{1+z} \quad (127)$$

$$q = \frac{1}{2}. \quad (128)$$

5.5 Κοσμολογική σταθερά - Σύμπαν deSitter

Το τελευταίο μοντέλο υπό εξέταση είναι το μοντέλο deSitter το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από την κοσμολογική σταθερά. Το μοντέλο αυτό περιγράφει τη διαστολή του Σύμπαντος τη σημερινή εποχή και στο μέλλον, αλλά και στο πρώιμο παρελθόν (εποχή πληθωρισμού). Η κοσμολογική σταθερά υπακούει σε καταστατική εξίσωση της μορφής $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$, δηλαδή $w_\Lambda = -1$. Από την εξίσωση συνέχειας βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\Lambda + 3H(1 + w_\Lambda) &= 0 \\ \dot{\rho}_\Lambda &= 0 \\ \rho_\Lambda(t) &= \rho_{\Lambda,*} = \text{σταθ} \end{aligned} \quad (129)$$

Η τιμή της πυκνότητας του ρευστού της κοσμολογικής σταθεράς είναι:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,*} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (130)$$

Επιστρέφουμε τώρα στην πρώτη εξίσωση Friedmann:

$$\begin{aligned}
 H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda,*} = H_*^2 \\
 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_*^2 \\
 \frac{\dot{a}}{a} &= H_* \\
 \int_{a_*}^a \frac{da'}{a'} &= H_* \int_{t_*}^t dt' \\
 a(t) &= a_* e^{H_*(t-t_*)}
 \end{aligned} \tag{131}$$

Στην περίπτωση που μελετάμε τη σημερινή εποχή θέτουμε $t_* = t_0$ και $H_* = H_0$ οπότε:

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \tag{133}$$

ενώ εάν μελετάμε την πληθωριστική περίοδο $t_* = t_I$ και $H_* = H_I$ ⁵, και άρα:

$$a(t) = a_I e^{H_I(t-t_I)} \tag{134}$$

Στο σύμπαν deSitter ο παράγοντας επιτάχυνσης είναι:

$$q = - \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = -1. \tag{135}$$

⁵Στην κυριαρχία κοσμολογικής σταθεράς, η παράμετρος Hubble παραμένει σταθερή και κατά συνέπεια $H_0 = H_I$. Ωστόσο επειδή στη ρεαλιστική μελέτη του σύμπαντος μεσολαβεί κυριαρχία άλλου συστατικού, οι δύο ποσότητες είναι διαφορετικές.

6 Το Σύμπαν ως σύνολο ρευστών

Όπως αναφέρθηκε, το Σύμπαν δεν αποτελείται από ένα και μόνο ρευστό αλλά από συνδυασμό πολλών διαφορετικών ρευστών. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι το Σύμπαν αποτελείται από ύλη ($w_m = 0$), ακτινοβολία ($w_r = \frac{1}{3}$), και κάποιας μορφής σκοτεινή ενέργεια με αρνητική πίεση ($w_{DE} < -\frac{1}{3}$) η οποία εξηγεί την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή, και στη γενική περίπτωση, μη μηδενική καμπυλότητα.

Η συνολική πυκνότητα θα δίνεται από το άθροισμα των συνιστωσών δίνεται από τη σχέση (4) και η συνολική πίεση:

$$P_{tot} = P_m + P_r + P_{DE} \quad (136)$$

Η εξίσωση συνέχειας (54) γίνεται:

$$\dot{\rho}_{tot} + 3H(\rho_{tot} + P_{tot}) = 0. \quad (137)$$

Δεχόμαστε ότι τα ρευστά δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, κατά συνέπεια η παραπάνω εξίσωση ισχύει χωριστά για το κάθε είδος:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) &= 0 \\ \dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + P_r) &= 0 \\ \dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) &= 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις καταστατικές εξισώσεις (105), (114) και (91) για τη μη σχετικιστική ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ενέργεια αντίστοιχα ($f \rightarrow DE$ στην τελευταία περίπτωση, για σκοτεινή ενέργεια με σταθερό παράγοντα w_{DE}), γράφουμε:

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} a^{-3} \quad (138)$$

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (139)$$

$$\rho_{DE}(a) = \rho_{DE,0} a^{-3(1+w_{DE})}. \quad (140)$$

Η πρώτη εξίσωση Friedmann (51) στην περίπτωση των πολλών ρευστών είναι:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot} - \frac{K}{a^2} \\ 1 &= \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{tot} - \frac{K}{a^2 H^2} \end{aligned}$$

Ορίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα $\rho_{crit}(a)$ και τον παράγοντα κλίμακας καμπυλότητας Ω_K μέσω των σχέσεων:

$$\rho_{crit}(a) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (141)$$

$$\Omega_K(a) = -\frac{K}{a^2 H^2} \quad (142)$$

μέσω των οποίων οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως:

$$1 - \Omega_K = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{tot}$$

$$1 - \Omega_K = \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}}$$

Ορίζουμε τώρα και τις αδιάστατες ποσότητες Ω_i όπου $i = m, r, DE$ ως $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}$. Συνεπώς:

$$1 - \Omega_K(a) = \Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_{DE}(a) \quad (143)$$

Οι ποσότητες Ω_i ονομάζονται παράμετροι πυκνότητας των ρευστών (energy density parameters). Εξετάζουμε τις τρεις περιπτώσεις για τη γεωμετρία του χώρου:

- Επίπεδη γεωμετρία ($K = 0$): Σε αυτή την περίπτωση $\Omega_K = 0$ και άρα:
 $\rho_{tot} = \rho_{crit}$ ή $\sum_i \Omega_i = 1$.
- Κλειστή γεωμετρία ($K = +1$): Τώρα ισχύει $\Omega_K < 0$ άρα $\rho_{tot} > \rho_{crit}$ και $\sum_i \Omega_i > 1$.
- Ανοικτή γεωμετρία ($K = -1$): Στην ανοικτή γεωμετρία έχουμε $\Omega_K > 0$ οπότε $\rho_{tot} < \rho_{crit}$ ή συναρτήσει των παραμέτρων πυκνότητας $\sum_i \Omega_i < 1$.

Ας εξετάσουμε τώρα την κανονικοποιημένη μορφή της εξίσωσης Hubble:

$$E^2(a) = \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{tot} - \frac{K}{a^2 H_0^2} \quad (144)$$

Για το κάθε ρευστό μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_i = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0} a^{-3(1+w_i)} = \Omega_{i,0} a^{-3(1+w_i)} \quad (145)$$

Άρα η (144) γράφεται:

$$E^2(a) = \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{DE,0}a^{-3(1+w_{DE})} + \Omega_{K,0}a^{-2} \quad (146)$$

Επίσης, για όλα τα ρευστά ισχύει:

$$\begin{aligned} \Omega_i(a) &= \frac{\rho_i(a)}{\rho_{crit}(a)} \\ \Omega_i(a) &= \frac{\rho_{i,0}a^{-3(1+w_i)}}{\rho_{crit,0}} \frac{\rho_{crit,0}}{\rho_{crit}(a)} \\ \Omega_i(a) &= \Omega_i a^{-3(1+w_i)} \frac{H_0^2}{H^2} \\ \Omega_i(a) &= \Omega_i \frac{a^{-3(1+w_i)}}{E^2(a)} \end{aligned}$$

οπότε η (146) γίνεται:

$$\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_{DE}(a) + \Omega_K(a) = 1 \quad (147)$$

Για $a = 1$ έχουμε $H = H_0$ οπότε από την (144):

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{DE,0} + \Omega_{K,0} = 1 \quad (148)$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για την ερυθρομετάθεση αντί του παράγοντα κλίμακας:

$$E^2(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{DE,0}(1+z)^{3(1+w_{DE})} + \Omega_{K,0}(1+z)^2 \quad (149)$$

Η σχέση (146) χρησιμοποιείται για την εύρεση της ηλικίας του Σύμπαντος:

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{\dot{a}}{aH_0} = \left(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{DE,0}a^{-3(1+w_{DE})} + \Omega_{K,0}a^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \int_0^t dt' H_0 &= \int_0^a \left(\Omega_{m,0}a'^{-3} + \Omega_{r,0}a'^{-4} + \Omega_{DE,0}a'^{-3(1+w_{DE})} + \Omega_{K,0}a'^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ H_0 t &= \int_0^a \frac{da'}{aE(a)} \end{aligned} \quad (150)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα επιλύεται αριθμητικά.

Ο παράγοντας κλίμακας έχει τιμή $a_0 = 1$ σήμερα και η τιμή του ήταν μικρότερη στο παρελθόν. Η σχέση (146) δείχνει πως κάθε συστατικό του

σύμπαντος έχει διαφορετική εξάρτηση από τον παράγοντα κλίμακας, δηλαδή κάθε όρος θα επικρατεί έναντι των άλλων σε διαφορετικές περιόδους, και θα καθορίζει την εξέλιξη του Σύμπαντος. Συγκεκριμένα, όταν $a \ll 1$ κυριαρχεί η ακτινοβολία⁶, την οποία διαδέχεται η κυριαρχία της ύλης, και πιο πρόσφατα η κυριαρχία της σκοτεινής ενέργειας.

Είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τον παράγοντα κλίμακας κατά τον οποίο η ύλη και η ακτινοβολία ήταν ισοδύναμες (Ισοδυναμία Ύλης - Ακτινοβολίας - Matter to Radiation Equipartition).

$$\left. \begin{aligned} \rho_m(a) &= \rho_{m,0} a^{-3} \\ \rho_r(a) &= \rho_{r,0} a^{-4} \end{aligned} \right\} \text{για } a = a_{mr},$$

$$\begin{aligned} \rho_m(a_{mr}) &= \rho_r(a_{mr}) \\ \rho_{m,0} a_{mr}^{-3} &= \rho_{r,0} a_{mr}^{-4} \\ a_{mr} &= \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί συναρτήσει των αδιάστατων $\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{crit,0}}$:

$$a_{mr} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \quad (151)$$

$$z_{mr} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} - 1. \quad (152)$$

Πειραματικές μετρήσεις

Στο κεφάλαιο 4 έγινε αναφορά σε μερικά πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη. Για τη μέτρηση αποστάσεων χρησιμοποιούνται αντικείμενα γνωστής λαμπρότητας, γνωστά ως *βασικά κεριά* (Standard Candles). Τα πιο ευρέως διαδεδομένα βασικά κεριά στην κοσμολογία είναι οι Υπερκαινοφανείς τύπου Ia (Type Ia Supernovae - SNIa). Οι SNIa είναι λευκοί νάνοι συνοδοί κάποιου αστέρα, ο οποίος λόγω της μικρότερης βαρυτικής του έλξης (για παράδειγμα ένας αστέρας στη φάση του γίγαντα δεν μπορεί να συγκρατήσει τα εξωτερικά στρώματα ύλης) τροφοδοτεί το λευκό νάνο. Όταν όμως ο τελευταίος αποκτήσει μάζα κοντά στο όριο Chandrasekhar, η αυξανόμενη πίεση από το εσωτερικό του προκαλεί βίαιη έκρηξη με χαρακτηριστικό φάσμα.

⁶Στην πραγματικότητα προηγείται μια περίοδος πληθωρισμού (inflation) που κυβερνάται από το πληθωριστικό πεδίο (inflaton field) το οποίο προκαλεί πολύ γρήγορη διαστολή. Το πληθωριστικό πεδίο θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Η χρησιμότητα των βασικών κεριών είναι προφανής: μπορούμε να μετρήσουμε την ένδειξη απόστασης:

$$\mu_{ob} = (m - M)_{ob} \pm \sigma_{ob} \quad (153)$$

και να υπολογίσουμε τη θεωρητική τιμή της από τη σχέση (75):

$$\mu_{th}(z, \vec{p}) = (m - M)_{th} = 5 \log d_L(z, \vec{p}) + 25 \quad (154)$$

όπου \vec{p} είναι το διάνυσμα των παραμέτρων που υποθέτουμε για το κοσμολογικό μοντέλο. Στην προκειμένη περίπτωση ο χώρος των παραμέτρων είναι η παράμετρος Hubble.

Υπολογίζουμε τώρα την ποσότητα:

$$\chi^2(\vec{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{ob}(z_i) - \mu_{th}(z_i, \vec{p})]^2}{\sigma_{i\ obs}^2} \quad (155)$$

Χρησιμοποιώντας τους SNIa που βρίσκονται σε μικρές ερυθρομεταθέσεις, όπου $r(z) \equiv \frac{cz}{H_0}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την παράμετρο Hubble σε $H_0 \simeq 73.48 \pm 1.66 \text{ km/sec/Mpc}$.

Εάν επεκτείνουμε το χώρο των παραμέτρων ώστε $\vec{p} = (\Omega_{m,0}, \Omega_{DE,0}, w_{DE}, H_0)$ - μπορούμε να αγνοήσουμε με ασφάλεια τη συνεισφορά της ακτινοβολίας για μικρή τιμή της ερυθρομετάθεσης - τότε η στατιστική ανάλυση δίνει:

$$\Omega_{K,0} = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{DE,0}) \simeq 0 \quad (156)$$

$$\Omega_{K,0} = 0 \quad (157)$$

$$w_{DE} = -1 \quad (158)$$

$$\Omega_{m,0} \simeq 0.27(0.31) \quad (159)$$

$$\Omega_{DE,0} \simeq 0.73(0.69) \quad (160)$$

όπου οι τιμές εκτός και εντός παρένθεσης έχουν ληφθεί από διαφορετικά σύνολα δεδομένων.

Ένα άλλο σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιείται ευρέως είναι η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου που θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Τα δεδομένα αυτά ωστόσο επιβεβαιώνουν τις μετρήσεις SNIa και δίνουν $\mathbf{p} = (\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{DE,0}, \Omega_{K,0}, H_0) = (0.317, 8.5 \cdot 10^{-4}, 0, 67.36)$

Από τις μετρήσεις αυτές βρίσκεται ο παράγοντας κλίμακας στην περίοδο ισοδυναμίας ύλης - ακτινοβολίας:

$$a_{mr} = 0.0003 \quad (161)$$

$$z_{mr} = 3000. \quad (162)$$

7 Πολυσύστατα σύμπαντα

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξεταστούν σύμπαντα αποτελούμενα από συνδυασμούς ρευστών για να μελετηθούν ως προς τη δυναμική τους.

7.1 Μοντέλο με ύλη και καμπυλότητα

:

Σε αυτήν την περίπτωση $\Omega_{r,0} = \Omega_{DE,0} = 0$. Από τις (146) και (143):

$$\begin{aligned} E^2(a) &= \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{K,0}a^{-2} \\ E^2(a) &= \Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega_{m,0})a^{-2} \end{aligned} \quad (163)$$

Μελετάμε χωριστά τις τρεις περιπτώσεις καμπυλότητας:

- $K = +1$: Σε αυτή την περίπτωση $\Omega_{K,0} = -\frac{1}{H_0^2}$ και άρα $\Omega_{m,0} > 1$ Άρα ο παράγοντας κλίμακας έχει ακρότατη τιμή για $a = a_{max}$ όπου:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ E(a) &= 0 \\ \Omega_{m,0}a_{max}^{-3} + (1 - \Omega_{m,0})a_{max}^{-2} &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

$$a_{max} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \quad (165)$$

Ο κοσμικός χρόνος θα δίνεται από τη σχέση:

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da'}{a'[\Omega_{m,0}a'^{-3} + (1 - \Omega_{m,0})a'^{-2}]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^a \frac{da'}{\Omega_{m,0}a'^{-1} + (1 - \Omega_{m,0})} \quad (166)$$

με παραμετρική λύση:

$$a(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} (1 - \cos \theta) \quad (167)$$

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} (\theta - \sin \theta) \quad (168)$$

Ο μέγιστος παράγοντας κλίμακας είναι για $\theta = \pi$ όπου αντίστοιχα:

$$\tilde{t} = t(\theta = \pi) = \frac{\pi\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (169)$$

Το σύμπαν αυτό διαστέλλεται μέχρι χρόνο \tilde{t} μετά τον οποίο επέρχεται συστολή. Η συστολή οδηγεί σε μια τελική κατάρρευση (Big Crunch) $a_{cr} = 0$ για $\theta_{cr} = 2\pi$ σε χρόνο:

$$t_{cr} = \frac{\pi\Omega_{m,0}}{H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (170)$$

- $K = -1$:

Στο ανοιχτό σύμπαν η παράμετρος κλίμακας καμπυλότητας είναι θετική ($\Omega_{K,0} > 0$) και συνεπώς $\Omega_{m,0} < 1$ και το σύμπαν διαστέλλεται επ'άπειρον (Big Chill).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το κλειστό σύμπαν βρίσκουμε ότι:

$$a(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} (\cosh \eta - 1) \quad (171)$$

$$t(\eta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \eta - \eta) \quad (172)$$

Ασυμπτωτικά για μεγάλο χρόνο $t \gg t_0$ ο παράγοντας κλίμακας τείνει σε γραμμική εξάρτηση από το χρόνο $a(t) \propto t$

- $K = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση επιστρέφουμε στο σύμπαν Einstein deSitter που έχει ήδη περιγραφεί, ο παράγοντας κλίμακας έχει τη γνωστή μορφή $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$. Δηλαδή το Σύμπαν διαστέλλεται επ'άπειρον, αλλά όχι επιταχυνόμενα. Το σχήμα δείχνει την εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας

Σε κάθε περίπτωση, τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν ότι εδώ και 7 δισεκατομμύρια χρόνια, το Σύμπαν έχει ξεκινήσει μια επιταχυνόμενη διαστολή. Κατά συνέπεια, τα μοντέλα Friedmann δεν μπορούν να περιγράψουν το Σύμπαν.

7.2 Μοντέλα Υλης-Σκοτεινής Ενέργειας

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\Omega_{r,0} = \Omega_{K,0} = 0$. Η φύση της σκοτεινής ενέργειας σαν ρευστό δεν είναι πλήρως γνωστή και περιγράφεται με τη χρήση ενός δυναμικού παράγοντα καταστατικής εξίσωσης $w_{DE} = w_{DE}(a)$. Γράφουμε λοιπόν:

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) = 0$$

$$\dot{\rho}_{DE} = -3H\rho_{DE}(1 + w_{DE}(a))$$

$$\frac{d\rho_{DE}}{da}\dot{a} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{DE}(1 + w_{DE}(a))$$

$$\rho_{DE} = \rho_{DE,0} \exp \left[-3 \int_1^a da' \frac{1 + w(a')}{a'} \right] \quad (173)$$

$$\rho_{DE} = \rho_{DE,0} Q_{DE}(a) \quad (174)$$

Η αντίστοιχη σχέση για την ύλη είναι η (138). Η πρώτη εξίσωση Friedmann είναι:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m(a) + \rho_{DE}(a)) > 0 \quad (175)$$

Επειδή $\rho_m, \rho_{DE} > 0$ δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία. Αντίθετα η δεύτερη εξίσωση Friedmann είναι:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + \rho_{DE} + 3P_{DE}] = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + \rho_{DE}(1 + 3w_{DE})] \quad (176)$$

Η περιγραφή του συστήματος χωρίζεται σε τρία στάδια:

- Επιταχυνόμενη διαστολή: $\ddot{a} > 0$, άρα $\rho_m + (1 + w_{DE})\rho_{DE} < 0$.
- Επιβραδυνόμενη διαστολή: $\ddot{a} < 0$, άρα $\rho_m + (1 + w_{DE})\rho_{DE} > 0$.
- Σημείο καμπής (Inflection point), δηλαδή $\ddot{a} = 0$.

Στο σημείο καμπής έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{m,I} + (1 + 3w_{DE,I})\rho_{DE,I} = 0 \\ \rho_{m,I} > 0 \\ \rho_{DE,I} > 0 \end{array} \right\} (1 + 3w_{DE,I}) < 0 \quad (177)$$

$$w_{DE,I} < -\frac{1}{3}$$

Για τη μορφή του παράγοντα καταστατικής εξίσωσης κάνουμε φαινομενολογικές υποθέσεις. Οι βασικές συναρτησιακές μορφές του w είναι:

$$w_{DE}(a) = \begin{cases} \text{σταθ}, & w_{DE} < -\frac{1}{3} \\ -1, & \Lambda\text{CDM} \\ w_0 + w_1(1 + a) \end{cases}$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$Q_{DE}(a) = \begin{cases} a^{-3(1+w_{DE})} \\ 1 \\ a^{-3(1+w_0+w_1)} \exp[-3w_1(1-a)] \end{cases}$$

Εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση. Όταν ο παράγοντας καταστατικής εξίσωσης είναι μικρότερος από -1 τότε έχουμε μοντέλα phantom, ενώ αν $w_{DE} > -1$ τότε έχουμε μοντέλα πεμπτουσίας (quintessence). Σημεία καμπής έχουμε όταν $\ddot{a} = 0$, άρα δηλαδή:

$$\begin{aligned} \rho_{m,I} &= -(1 + 3w_{DE})\rho_{DE,I} \\ \rho_{m,0}a_I^{-3} &= -(1 + 3w_{DE})\rho_{DE,0}a^{-3(1+w_{DE})} \\ \frac{\rho_{DE,0}}{\rho_{m,0}} &= -\frac{1}{a_I^{-3w_{DE}}(1 + 3w_{DE})} \\ \frac{\Omega_{DE,0}}{\Omega_{m,0}} &= -\frac{1}{a_I^{-3w_{DE}}(1 + 3w_{DE})} \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν στο σημείο καμπής ο παράγοντας κλίμακας θα ισούται με:

$$a_I = \left[-\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{DE,0}(1 + 3w_{DE})} \right]^{-\frac{1}{3w_{DE}}}. \quad (178)$$

Για να υπάρχει επιταχυνόμενη διαστολή θα πρέπει το σημείο καμπής να βρίσκεται στο παρελθόν, δηλαδή $a_I < 1$. Από τη σχέση (178) προκύπτει:

$$\left[-\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{DE,0}(1+3w_{DE})} \right]^{-} \frac{1}{3w_{DE}} < 1$$

$$\left[-\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{DE,0}(1+3w_{DE})} \right] > 1 \quad (179)$$

$$-\Omega_{m,0} > (1+3w_{DE})\Omega_{DE,0}$$

$$-\Omega_{m,0} > (1+3w_{DE})(1-\Omega_{m,0})$$

$$\Omega_{m,0} < 1 + \frac{1}{3w_{DE}} \quad (180)$$

Για να υπάρχει επιταχυνόμενη διαστολή η πυκνότητα της ύλης δεν πρέπει να ξεπερνά την τιμή $\Omega_{m,0} = 1 + \frac{1}{3w_{DE}}$!

7.3 Το μοντέλο Λ CDM

Στην ειδική περίπτωση όπου $w = -1$, γίνεται λόγος για την κοσμολογική σταθερά και το μοντέλο Λ CDM. Η κοσμολογική σταθερά ως ρευστό μελετήθηκε στο κεφάλαιο 5. Περιλαμβάνοντας και την ύλη στην ανάλυση έχουμε:

$$E^2(a) = \frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}$$

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}$$

$$\int_0^a \frac{da'}{a \sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}} = \int_0^t H_0 dt$$

το οποίο επιλύεται με την αλλαγή μεταβλητής $a = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \text{sh}^{\frac{2}{3}} w$ και τελικά:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \text{sh}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \right) \quad (181)$$

ή αντίστοιχα:

$$t(a) = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0} \text{sh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{\frac{3}{2}} \right) \quad (182)$$

Η ηλικία του Σύμπαντος είναι $t_0 = t(a=1)$, το οποίο για $\Omega_{m,0} \simeq 0.27 - 0.30$ δίνει $t_0 \simeq 13.7 - 13.9 \text{Gyr}$. Το σημείο καμψής θα είναι όταν $\ddot{a} = 0$ δηλαδή πάλι:

$$\begin{aligned}\rho_{m0}a_I^{-3} + 2\rho_{\Lambda,0} &= 0 \\ \Omega_{m,0}a_I^{-3} + 2\Omega_{\Lambda,0} &= 0 \\ a_I &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

για τις τιμές $\Omega_{m,0} = 0.3$ και $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ βρίσκουμε $a_{I,\Lambda} \simeq 0.6$ και $z_{I,\Lambda} \simeq 0.67$. Όπως και για την περίπτωση $w_{DE} \neq -1$, για να βρίσκεται το σημείο καμπής στο παρελθόν, η πυκνότητα της ύλης να έχει ανώτατη τιμή $\Omega_{m,0} < \frac{2}{3}$.

Αντίστοιχα, η ισοδυναμία ύλης - κοσμολογικής σταθεράς θα συμβεί όταν:

$$\begin{aligned}\rho_m(a_{m\Lambda}) &= \rho_\Lambda(a_{m\Lambda}) \\ \rho_{m,0}a_{m\Lambda}^{-3} &= \rho_{\Lambda,0} \\ a_{m\Lambda} &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{δηλαδή για τις γνωστές τιμές} \\ a_{m\Lambda} &= 0.75 \\ z_{m\Lambda} &= 0.33.\end{aligned}$$

Η κυριαρχία της ύλης σταματά στο σχετικά πρόσφατο παρελθόν!

Στην περίπτωση του μοντέλου ύλης - κοσμολογικής σταθεράς, για $z \gg 1$ η συνεισφορά της ύλης είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της κοσμολογικής σταθεράς και άρα το μοντέλο συμπεριφέρεται όπως το EdS με $H = \frac{2}{3t}$. Αντίθετα στο μακρινό μέλλον, η φθίνουσα πορεία του $\rho_m(a)$ θα συνεχιστεί και το μοντέλο συμπεριφέρεται ως μοντέλο deSitter όπου $H \sim \text{σταθ} = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0$.

Ας υπολογίσουμε τώρα τον παράγοντα επιτάχυνσης $q(a)$:

$$\begin{aligned}q &= -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) \\ q &= -\left(1 - \frac{3}{2} \frac{H_0 \Omega_{m,0} a^{-3}}{H_0 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0})}\right) \\ q &= \frac{3}{2} \Omega_m(a) - 1\end{aligned}$$

Στη σημερινή εποχή $a_0 = 1$, άρα $q_0 = \frac{3}{2} \Omega_{m,0} - 1 \simeq -0.5$ για $\Omega_{m,0} = 0.3$.

8 Φυσική της σκοτεινής ενέργειας ως πεδίο

Θεωρούμε ένα ομογενές βαθμωτό πεδίο $\phi = \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t)$. Η Λαγκραντζιανή του πεδίου αυτού θα είναι της μορφής:

$$L_\phi = K(\phi) - V(\phi) = \frac{\epsilon \dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (183)$$

ενώ η Χαμιλτονιανή του:

$$H_\phi = K(\phi) + V(\phi). \quad (184)$$

Η σταθερά ϵ σχετίζεται με τη φύση του πεδίου. Συγκεκριμένα, για μοντέλα quintessence έχουμε $\epsilon = 1$, ενώ για phantom είναι $\epsilon = -1$. Η πίεση του πεδίου σύμφωνα με την κβαντική θεωρία πεδίου είναι:

$$P_\phi = L_\phi = \frac{\epsilon \dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (185)$$

ενώ η αντίστοιχη πυκνότητα γράφεται:

$$\rho_\phi = \frac{\epsilon \dot{\phi}^2}{2} + V(\phi). \quad (186)$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε τον παράγοντα καταστατικής εξίσωσης w_ϕ :

$$w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} = \frac{K(\phi) - V(\phi)}{K(\phi) + V(\phi)} \quad (187)$$

- Όταν το πεδίο μεταβάλλεται πολύ αργά, $K(\phi) \ll V(\phi)$ τότε ο παράγοντας $w_\phi \rightarrow w_\Lambda = -1$.
- Για επιταχυνόμενη διαστολή (και $\epsilon = +1$) πρέπει $w_\phi < -\frac{1}{3}$, άρα λοιπόν από την (187):

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} &< -\frac{1}{3} \\ 2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) &< 0 \\ \dot{\phi}^2 &< V(\phi). \end{aligned}$$

- Για τα μοντέλα phantom $\epsilon = -1$. Σε αυτήν την περίπτωση από την (187):

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} &< -1 \\ \frac{-\dot{\phi}^2}{-\dot{\phi}^2 - V(\phi)} &< 0 \\ \dot{\phi}^2 &< 2V(\phi). \end{aligned}$$

Από παρατηρήσεις προκύπτει ότι ο παράγοντας $w(a=1)$ ανήκει στην περιοχή $[-1.1, -1.02] \pm 0.1$. Η άγνωστη φυσική της σκοτεινής ενέργειας εισέρχεται στις εξισώσεις ως δυναμική ενέργεια των αλληλεπιδράσεων $V(\phi)$. Έχουν προταθεί διάφορες εκφράσεις για τη μορφή του $V(\phi)$. Ο στόχος είναι να βρεθεί ποιά μορφή του $V(\phi)$ αναπαράγει καλύτερα τα παρατηρησιακά δεδομένα. Από την εξίσωση συνέχειας (92), λαμβάνοντας υπόψιν τις (186) και (185), έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) &= 0 \\ \epsilon \ddot{\phi} \dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \dot{\phi} + 3H\epsilon \dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \epsilon \frac{dV}{d\phi} &= 0, \end{aligned} \tag{188}$$

η οποία είναι η εξίσωση Klein Gordon για το πεδίο ϕ .

Άσκηση Να βρεθεί η χρονική εξέλιξη πεδίου $\phi(t)$ στο σύμπαν deSitter, όταν $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$.

Λύση Παίρνουμε την εξίσωση (188), έχοντας υπόψιν ότι στο σύμπαν deSitter ο παράγοντας Hubble δεν αλλάζει πολύ: $H \approx H_\Lambda = \text{σταθ}$, και επίσης $\epsilon = 1$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H_\Lambda \dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} &= 0 \\ \ddot{\phi} + 3H_\Lambda \dot{\phi} + m^2\phi &= 0 \end{aligned}$$

άρα το πεδίο έχει λύσεις της μορφής $\phi(t) = e^{\lambda t}$, οπότε αντικαθιστώντας:

$$\lambda^2 + 3H_\Lambda \lambda + m^2\phi = 0$$

με λύσεις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3H_\Lambda \pm \sqrt{9H_\Lambda^2 - 4m^2}}{2}$$

άρα η γενική λύση είναι $\phi(t) = \phi_1 e^{\lambda_1 t} + \phi_2 e^{\lambda_2 t}$. Από τις δύο μερικές λύσεις, η δεύτερη φθίνει εκθετικά και μπορούμε να την αγνοήσουμε με ασφάλεια και να γράψουμε $\phi \approx \phi_1 e^{\lambda_1 t}$.

9 Κοσμολογικοί ορίζοντες

Υποθέτουμε ότι η μεγάλη έκρηξη έγινε σε κοσμικό χρόνο $t = 0$. Ο ορίζοντας γεγονότων είναι η απόσταση που διανύει ένα φωτόνιο από τη στιγμή $t = 0$ έως τη στιγμή \tilde{t} :

$$\eta = c \int_0^{\tilde{t}} \frac{dt'}{a(t')} \quad (189)$$

Ένα σωματίδιο, δεδομένης της διαστολής του Σύμπαντος έκτοτε, ταξιδεύοντας από τη στιγμή $t = 0$ έως κάποια μεταγενέστερη στιγμή \tilde{t} θα έχει διανύσει απόσταση ίση με:

$$d_H = ca(t) \int_0^{\tilde{t}} \frac{dt}{a(t)} = ca(t) \int_0^{\tilde{a}} \frac{da}{a^2 H(a)} \quad (190)$$

Η απόσταση αυτή αποτελεί ορίζοντα για τα σωματίδια (particle horizon). Τη σημερινή εποχή ο ορίζοντας δίνεται από τη σχέση:

$$d_{H,0} = d_H(t = t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (191)$$

ενώ αντίστοιχα ο ορίζοντας από σήμερα έως το άπειρο θα είναι:

$$d_{H,\infty} = ca(t) \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} \quad (192)$$

Παρακάτω αναφέρεται η εξέλιξη του ορίζοντα σωματιδίων για μερικά γνωστά μοντέλα:

- Μοντέλο EdS:

$$a \propto t^{2/3} \rightarrow d_H = ct^{2/3} \int_0^t dt' t'^{2/3} = 3ct$$

- Σύμπαν ακτινοβολίας:

$$a \propto t^{1/2} \rightarrow d_H = ct^{1/2} \int_0^t dt' t'^{1/2} = 2ct$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζεται η εξέλιξη του Σύμπαντος:

$kT(\text{GeV})$	$t(\text{sec})$	Σχόλια
10^{19}	10^{-43}	Περίοδος Planck - Περιγραφή με κβαντική βαρύτητα
10^{15}	10^{-32}	Πληθωρισμός (Inflation)
10^2	10^{-11}	Διαχωρισμός της ισχυρής πυρηνικής δύναμης
$0.1 - 0.5$	$10^{-5} - 10^6$	Δημιουργία των πρώτων quarks
10^{-1}	10^{-4}	Βαρυογέννεση
$10^{-2} - 10^{-3}$	$10^{-3} - 1$	Αλληλεπίδραση Φωτεινής - Σκοτεινής Ύλης
$3 \cdot 10^{-4}$	$3 - 4$	Εξαΰλωση ζευγών $e^+ - e^-$
10^{-4}	180	Πυρηνοσύνθεση
$10^{-8} - 10^{-10}$	$10^{10} - 10^{11}$	Κυριαρχία Ύλης ($z \sim 3000$)

10 Εποχές εξέλιξης του Σύμπαντος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στα διαφορετικά στάδια της εξέλιξης του Σύμπαντος, ξεκινώντας από τη Μεγάλη Έκρηξη προς το παρόν.

10.1 Περίοδος Planck

Όταν το Σύμπαν είναι πάρα πολύ μικρό ($t \sim 10^{-43}$) η βαρύτητα πρέπει να περιγραφεί με κβαντικό τρόπο. Τα σωματίδια υπακούν τους νόμους της στατιστικής φυσικής. Από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, έχουμε:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \quad (193)$$

Ας αντικαταστήσουμε $\Delta E = E_P = M_P c^2$ όπου M_P είναι η μάζα Planck, η οποία είναι ίση με $M_P = \rho_P \ell_P^3$. Με ℓ_P συμβολίζουμε το μήκος Planck $\ell_P = ct_P$, και αντίστοιχα t_P είναι ο χρόνος Planck. Αντίθετα η πυκνότητα Planck υπολογίζεται από την εξίσωση Friedmann για $H \sim \frac{1}{t_P}$, οπότε (αγνοώντας την ποσότητα $\frac{8\pi}{3}$) γράφεται $\rho_P \sim \frac{1}{Gt_P^2} \simeq 10^{93} \text{gr} \cdot \text{cm}^{-3}$. Άρα η μάζα Planck θα είναι $M_P \sim \frac{c^3 t_P}{G}$.

Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (193) ως:

$$\begin{aligned} \hbar &= M_P c^2 t_P \\ \hbar &= \frac{c^5 t_P^2}{G} \\ t_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \simeq 10^{-43} \text{sec} \end{aligned} \quad (194)$$

Η ενεργειακή κλίμακα που αντιστοιχεί στην περίοδο Planck θα είναι $E_P = M_P c^2 \simeq 10^{19} \text{GeV}$ και η αντίστοιχη θερμοκρασία $T_P = \frac{E_P}{k_B} = 1.4 \cdot 10^{32} \text{K}$, άρα το Σύμπαν ήταν πολύ θερμό και πολύ πυκνό.

10.2 Μεγαλοενοποιημένη Θεωρία

Η μεγαλοενοποιημένη θεωρία (Grand Unified Theory GUT) μελετά την περίοδο που διαδέχεται την περίοδο Planck και λαμβάνει χώρα σε ενεργειακή κλίμακα $E \sim 10^{16} \text{GeV}$. Δεν πρόκειται για πλήρως θεμελιωμένη θεωρία αλλά προτείνει πως οι τρεις θεμελιώδεις δυνάμεις (ισχυρή, ηλεκτρομαγνητική και ασθενής αλληλεπίδραση, εκτός δηλαδή της βαρύτητας) είναι ενοποιημένες και περιγράφονται από μία μόνο δύναμη.

10.3 Ηλεκτρασθενής μετάβαση

10.3 Ηλεκτρασθενής μετάβαση

Πρόκειται για την περίοδο που διαδέχεται την GUT, όταν η ισχυρή αλληλεπίδραση αποχωρίζεται από τις άλλες δύο δυνάμεις, όταν $E \sim 100 GeV$. Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίοδο, η ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής και ασθενούς δυνάμεως σε ηλεκτρασθενή είναι θεμελιωμένη σε θεωρία και έχει παρατηρηθεί πειραματικά. Από αυτήν περίοδο και στο εξής, το καθιερωμένο μοντέλο των στοιχειωδών σωματιδίων (Standard Model - SM) περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τα φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν στο νεαρό Σύμπαν.

10.4 Μετάβαση των κουάρκ

Για ενέργειες μεγαλύτερες από $\sim 200 MeV$ τα quarks και τα γλουόνια συμπεριφέρονται σαν ελεύθερα σωματίδια. Για ενέργειες $\sim 200 MeV$ η ισχυρή αλληλεπίδραση τα αναγκάζει να ενωθούν σε αδρόνια (βαρυόνια, λχ. p^+ , n ή μεσόνια, λχ. $\pi^{+,0,-}$, $K^{+,0,-}$). Ο όρος βαρυονική ύλη αναφέρεται (κατά παράβαση) στη φωτεινή ύλη, δηλαδή την ύλη η οποία αλληλεπιδρά και ηλεκτρομαγνητικά εκτός από βαρυτικά, συμπεριλαμβανομένων δηλαδή ηλεκτρονίων κα.

Ένα από τα ανοικτά προβλήματα της Κοσμολογίας είναι η παρατηρούμενη ασυμμετρία ύλης αντιύλης - όλο το παρατηρούμενο Σύμπαν είναι φτιαγμένο από ύλη. Ωστόσο, όλες οι γνωστές αλληλεπιδράσεις διατηρούν το βαρυονικό αριθμό - δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί ύλη χωρίς να συνοδεύεται από αντίστοιχη δημιουργία ή καταστροφή αντιύλης και αντίστροφα.

Το φαινόμενο μελετήθηκε από τον Andrei Sakharov ο οποίος το 1967 πρότεινε 4 προϋποθέσεις για την επικράτηση της ύλης έναντι της αντιύλης:

1. Παραβίαση της διατήρησης του Βαρυονικού αριθμού (δεν έχει παρατηρηθεί).
2. Παραβίαση της διατήρησης συζυγίας φορτίου (Charge Conjugation - C, που έχει παρατηρηθεί σε ασθενείς αλληλεπιδράσεις).
3. Παραβίαση της διατήρησης συζυγίας φορτίου - αρτιότητας (Charge Conjugation Parity - CP) η οποία παρατηρείται (σπάνια) σε ασθενείς αλληλεπιδράσεις.
4. Η συχνότητα αλληλεπιδράσεων να είναι μικρότερη από το ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος ώστε το σύστημα να μην επέλθει σε ισορροπία.

Η πρόταση του Sakharov στο πρόβλημα της ασυμμετρίας είναι πως κάποιες αλληλεπιδράσεις που πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις δημιουργούν μια πολύ μικρή ασυμμετρία στο πλήθος της ύλης έναντι της αντιύλης, περίπου

ένα επιπλέον σωματίδιο ύλης ανά 10^9 ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων. Με την πάροδο του χρόνου τα ζεύγη αυτά αλληλεπιδρούν και εξαϋλώνονται παράγοντας φωτόνια, δίνοντας το λόγο αριθμητικής πυκνότητας βαρυονίων φωτονίων (παράγοντας ασυμμετρίας):

$$\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} \sim 10^{-9}. \quad (195)$$

10.5 Πυρηνοσύνθεση

Η περίοδος της Πυρηνοσύνθεσης είναι πολύ σημαντική για την Κοσμολογία καθώς τα αποτελέσματά της δίνουν σημαντικούς περιορισμούς σε αρκετές κοσμολογικές παραμέτρους. Έλαβε χώρα σε κοσμικό χρόνο $t = 10^{-4} - 180 \text{ sec}$ δηλαδή σε ερυθρομετάθεση $z \sim 10^8$, όταν η θερμοκρασία ήταν της τάξης $kT \sim 1 - 10 \text{ MeV}$. Κατά την περίοδο της πυρηνοσύνθεσης, το Σύμπαν λειτουργούσε ως το εσωτερικό ενός αστέρα, παράγοντας He στην κοσμική αναλογία ($\sim 24\%$) που παρατηρείται σήμερα, κάτι που δεν μπορεί να εξηγηθεί αν το ήλιο παράγεται αποκλειστικά στο εσωτερικό των αστέρων. Κατά τη διάρκεια της πυρηνοσύνθεσης παράγονται φωτόνια τα οποία στη συνέχεια αποτελούν την ακτινοβολία υποβάθρου.

11 Πληθωρισμός

Κατά την πληθωριστική περίοδο η διαστολή του σύμπαντος είναι εκθετικά επιταχυνόμενη. Ο πληθωρισμός είναι μια φαινομενολογική στη βάση της θεωρία που προτάθηκε ανεξάρτητα από τους Alan Guth και Alexei Starobinsky με σκοπό να εξηγήσει μερικά βασικά προβλήματα του καθιερωμένου προτύπου, συγκεκριμένα το πρόβλημα της επιπεδότητας, το πρόβλημα του ορίζοντα, το πρόβλημα της μη ύπαρξης μαγνητικών μονοπόλων, αλλά και η δημιουργία των πρωταρχικών διαταραχών που δημιουργεί τις σημερινές κοσμολογικές δομές. Ο πληθωρισμός σαν θεωρία προτείνει μια κομψή επίλυση των παραπάνω προβλημάτων.

11.1 Το πρόβλημα της επιπεδότητας

Στο κεφάλαιο 6 ορίσαμε τον παράγοντα κλίμακας καμπυλότητας Ω_K μέσω της σχέσης (142). Από παρατηρήσεις σήμερα γνωρίζουμε ότι η τιμή του $\Omega_{K,0}$ είναι πολύ κοντά στο μηδέν - το Σύμπαν είναι φαινομενικά επίπεδο.

Όταν το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη, έχουμε $E^2 \propto (1+z)^3$, και άρα $\Omega_K(z) \propto (1+z)^{-1}$. Αντίθετα, στην κυριαρχία της ακτινοβολίας $E^2(z) \propto (1+z)^4$ άρα $\Omega_K(z) \propto (1+z)^2$. Δηλαδή όσο προχωράμε προς μεγαλύτερη ερυθρομετάθεση, η καμπυλότητα πρέπει να είναι όλο και πιο κοντά στο 0:

- $z = 1100, |\Omega_K(z)| \leq 10^{-4}$
- $z = 3200, |\Omega_K(z)| \leq 10^{-5}$
- $z = 10^8, |\Omega_K(z)| \leq 10^{-13}$

Η μελέτη αυτή δείχνει ότι η Μεγάλη Έκρηξη πρέπει να δημιούργησε ένα σύμπαν εξαιρετικά επίπεδο.

11.2 Το πρόβλημα του ορίζοντα

Στο κεφάλαιο 9 έγινε λόγος για τον ορίζοντα γεγονότων, δηλαδή τη μέγιστη απόσταση που μπορεί να διανύσει το φως, από τη Μεγάλη Έκρηξη έως σήμερα ο οποίος δίνεται από τη σχέση (190):

$$d_H = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_z^\infty \frac{dz'}{E(z')}$$

Θεωρούμε δύο περιοχές του ουρανού που απέχουν στον ουράνιο θόλο κατά θ , στα όρια του παρατηρήσιμου Σύμπαντος. Οι περιοχές αυτές θα βρίσκονται σε επικοινωνία (εντός του ορίζοντα) εάν η μεταξύ τους απόσταση

είναι μικρότερη από d_H . Θα είναι λοιπόν $d = \theta d_A < d_H$ όπου d_A είναι η γωνιακή απόσταση που ορίζεται από τη σχέση (88). Στην περίοδο κυριαρχίας της ύλης έχουμε $E(z) \approx \sqrt{\Omega_{m,0}}(1+z)^{3/2}$ άρα η μέγιστη τιμή του θ θα είναι $\theta_{max} \approx \frac{d_H}{d_A} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{1+z}}}{\frac{1}{1-\sqrt{1+z}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+z}}$.

Η ακτινοβολία υποβάθρου αποδεσμεύτηκε από την ύλη σε ερυθρομετάθεση $z \simeq 1100$, άρα τα φωτόνια έχουν προλάβει να διανύσουν απόσταση πάνω στον ουράνιο θόλο ίση με $\theta_{max} \simeq 0.03rad = 1.8^\circ$. Ωστόσο οι μετρήσεις της ακτινοβολίας υποβάθρου δείχνουν πως υπάρχει ομοιογένεια ακόμα και σε περιοχές που απέχουν περισσότερο από τη μέγιστη απόσταση για να βρίσκονται σε επικοινωνία. Αυτό είναι γνωστό ως το πρόβλημα του ορίζοντα.

11.3 Η φυσική του πληθωρισμού

Ο πληθωρισμός ξεκινά πολύ σύντομα μετά τη Μεγάλη Έκρηξη ($t \sim 10^{-36}sec$). Η διαστολή ακολουθεί το μοντέλο deSitter με $H \sim σταθ = H_I$ και $a(t) = a_I e^{H_I(t-t_I)}$ όπου ο δείκτης I υποδηλώνει την έναρξη του πληθωρισμού. Έστω ότι το Σύμπαν βγαίνει από την περίοδο του πληθωρισμού τη στιγμή t_F . Ο παράγοντας κλίμακας θα είναι τότε:

$$a(t_F) = a_I e^{H_I(t_I-t_F)} = a_I e^N \quad (196)$$

λέμε λοιπόν πως ο πληθωρισμός διήρκεσε N αυξήσεις (e-foldings). Για να επιλυθούν τα προβλήματα που αναφέραμε, χρειάζονται τουλάχιστον 60 e-foldings.

Ο πληθωρισμός μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια ενός βαθμωτού πεδίου όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 8. Ο παράγοντας καταστατικής εξίσωσης είναι $w_\phi \simeq -1$ οπότε από την (187):

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi) \quad (197)$$

$$P_\phi \approx -V(\phi) \quad (198)$$

$$\rho_\phi \approx V(\phi) \quad (199)$$

Για τη φύση του πληθωριστικού πεδίου υιοθετούμε συνήθως το σενάριο της αργής κύλισης (Slow-roll approximation), στα πλαίσια του οποίου το δυναμικό είναι αρκετά 'επίπεδο' ώστε να θεωρήσουμε ότι η τιμή του πεδίου μεταβάλλεται πολύ αργά. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε αμεληταίο τον όρο $\dot{\phi}$ συγκρινόμενο με το δυναμικό, όπως και την επιτάχυνση του πεδίου $\ddot{\phi}$.

Από την πρώτη εξίσωση Friedmann (51) και την (186), για $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \\
H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \\
H^2 &\approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi)
\end{aligned} \tag{200}$$

ενώ με τις ίδιες συνθήκες η εξίσωση Klein Gordon (188):

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi} \tag{201}$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε επίσης $\left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 9H^2V(\phi)$. Από τη δεύτερη εξίσωση Friedmann (53) έχουμε:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3P_\phi) \tag{202}$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3P_\phi) \tag{203}$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_\phi + P_\phi) \tag{204}$$

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= -4\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) \\
\dot{H}^2 &= -4\pi G \dot{\phi}^2
\end{aligned} \tag{205}$$

Επιστρέφοντας πάλι στην εξίσωση (51) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \\
V(\phi) &= \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right)
\end{aligned} \tag{206}$$

11.4 Λύση στο πρόβλημα επιπεδότητας

Ας υποθέσουμε ότι το Σύμπαν προ της πληθωριστικής περιόδου ($a = a_I$) είχε μη μηδενική καμπυλότητα, με $\Omega_K(a_I) \propto a_I^2$. Ας υποθέσουμε επίσης πως ο πληθωρισμός διήρκεσε N e-foldings. Μετά το τέλος του πληθωρισμού

($a = a_F$) ο παράγοντας κλίμακας της καμπυλότητας θα είναι $\Omega_K(a_F) \propto a_F^2$. Η σταθερά αναλογίας και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια καθώς η παράμετρος $H = H_I$ είναι σταθερή κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Άρα λοιπόν μετά το τέλος της πληθωριστικής περιόδου:

$$\begin{aligned}\Omega_K(a_F) &= \frac{a_I^2}{a_F^2} \Omega_K(a_I) \\ \Omega_K(a_F) &= e^{-2N} \Omega_K(a_I)\end{aligned}\quad (207)$$

Κατά συνέπεια, οποιαδήποτε αρχική καμπυλότητα, λόγω της ταχύτατης διαστολής, εξομαλύνεται.

11.5 Λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα

Πριν τον πληθωρισμό το Σύμπαν κυριαρχείται από ακτινοβολία. Υποθέτουμε πως ο πληθωρισμός ξεκινά τη στιγμή $t_I = 10^{-36} \text{sec}$. Ο ορίζοντας γενοτόνων τότε θα είναι:

$$d_{H,I} = ca_I \int_0^{t_I} \frac{dt}{a_I} \left(\frac{t_I}{t} \right)^{1/2} = 2ct_I \simeq 6 \cdot 10^{-26} \text{cm}$$

Στο τέλος του πληθωρισμού ($t = t_F$) ο ορίζοντας θα έχει διάσταση:

$$\begin{aligned}d_{H,F} &= ca_F \int_0^{t_F} \frac{dt}{a(t)} \\ d_{H,F} &= ca_F \left[\int_0^{t_I} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_I}^{t_F} \frac{dt}{a(t)} \right] \\ d_{H,F} &= ca_F \left[\int_0^{t_I} \frac{dt}{a_I} \sqrt{\frac{t_I}{t}} + \int_{t_I}^{t_F} \frac{dt}{a_I \exp[H_I(t - t_I)]} \right] \\ d_{H,F} &= ce^N [2t_I - H_I^{-1} \exp[-H_I(t - t_I)]_{t=t_I}^{t=t_F}] \\ d_{H,F} &= ce^N [2t_I - (e^N H_I)^{-1} + H_I^{-1}]\end{aligned}$$

Επειδή υποθέτουμε μεγάλο αριθμό αναδιπλώσεων, ο μεσαίος όρος είναι αμεληταίος, ενώ $H_I^{-1} \approx t_I$ οπότε τελικά:

$$d_{H,F} \approx 3ce^N t_I \quad (208)$$

Για περίπου $N = 60$ e-foldings, ο ορίζοντας παίρνει τιμή $d_{H,F} \sim 10.3 \text{cm}$

Κατά συνέπεια, περιοχές που βρίσκονταν αρχικά σε επαφή, απομακρύνονται τόσο απότομα που πλέον δεν βρίσκονται η μία εντός του ορίζοντα της

άλλης. Ο πληθωρισμός λοιπόν δίνει μια μακροσκοπική διάσταση του Σύμπαντος, τα χαρακτηριστικά του οποίου κληρονομούνται από τη Μεγάλη Έκρηξη.

11.6 Το πρόβλημα της έλλειψης μαγνητικών μονοπόλων και η λύση του

Κατά τη διάρκεια της εποχής των μεγαλοενοποιημένων θεωριών, προβλέπεται η δημιουργία μαγνητικών μονοπόλων, τα οποία οφείλουν να είναι αρκετά σταθερά ώστε να παρατηρηθούν σήμερα. Πού είναι λοιπόν αυτά τα μαγνητικά μονόπολα;

Τα μονόπολα θα ακολουθούν το νόμο $\rho_{MON} \propto a^{-3}$. Ακολουθώντας την ίδια πορεία όπως και στο πρόβλημα επιπεδότητας, βρίσκουμε:

$$\rho_{MON}(a_F) = \left(\frac{a_F}{a_I}\right)^{-3} = e^{-3N}$$

Οπότε βλέπουμε πως οποιαδήποτε αρχική πυκνότητα αραιώνεται σε βαθμό που να εξηγήει τη φαινομενική έλλειψη μονοπόλων.

11.7 Πληθωρισμός και αρχικές κβαντικές διαταραχές

Ο πληθωρισμός δημιουργεί αρχικές κβαντικές διαταραχές, οι οποίες μετά το τέλος του αρχίζουν να εξελίσσονται δημιουργώντας τις παρατηρούμενες κοσμικές δομές σήμερα.

Εισάγουμε μια μικρή διαταραχή στο ομογενές πεδίο ϕ τέτοια ώστε:

$$\phi(\vec{x}, t) = \tilde{\phi}(t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \quad (209)$$

Η διάσταση του πεδίου είναι $[\phi] = \{\text{μήκος}\}^{-1} = \{\text{μήκος}\}^{-1}$ όπως και του $[H]$. Θεωρούμε ότι η διαταραχή είναι της τάξης $\delta\phi \sim H$. Το φάσμα των διαταραχών (Perturbation Power Spectrum) είναι:

$$P_{\delta\phi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^2 \rangle \quad (210)$$

Το φάσμα των διαταραχών ακολουθεί ένα νόμο δύναμης:

$$P(k) \propto k^n \quad (211)$$

όπου ο δείκτης n λέγεται δείκτης του φάσματος (spectral index). Τα περισσότερα πληθωριστικά σενάρια έχουν $n \simeq 1$. Το φάσμα $P(k) \propto k$ δηλαδή $n = 1$ είναι γνωστό ως φάσμα Harrison Zel'dovich. Από τους δορυφόρους WMAP και Planck έχει μετρηθεί $n \simeq 0.97$ και $n \simeq 0.967 \pm 0.007$.

12 Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου - Cosmic Microwave Background (CMB)

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 10.5, η περίοδος της πυρηνοσύνθεσης δημιουργεί μία μεγάλη ποσότητα φωτονίων τα οποία αλληλεπιδρούν στενά με την ύλη. Καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται και ψύχεται, τα φωτόνια αποδεσμεύονται από το πλάσμα και δημιουργούν την ακτινοβολία υποβάθρου - Cosmic Microwave Background (CMB). Η ακτινοβολία υποβάθρου είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος και άρα υπακούει το νόμο του Planck:

$$I_\nu = \frac{\frac{h\nu^3}{c^2}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (212)$$

Στην περίοδο που μελετάμε (πρώιμο Σύμπαν), κυριαρχεί η ακτινοβολία, η οποία ακολουθεί το νόμο $\rho_r(a) \propto a^{-4}$. Από το νόμο Stefan - Boltzmann, $\rho_r \propto \sigma T^4$. Κατά συνέπεια, συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις βρίσκουμε:

$$T \propto \frac{1}{a(t)} \quad (213)$$

$$T \propto (1+z) \quad (214)$$

Τα "αρχέγονα" φωτόνια του CMB, υπακούν το νόμο (139) μέχρι σήμερα. Από μετρήσεις είναι γνωστή η θερμοκρασία του φάσματος του υποβάθρου: $T = 2.73K$. Άρα για $z = 0$ η σχέση (214) γράφεται:

$$T(z) = 2.73(1+z) \quad (215)$$

Για αυτή τη θερμοκρασία, από την κατανομή Planck μπορούμε να υπολογίσουμε πως υπάρχουν περίπου 413 φωτόνια ανα cm^3 . Το CMB είναι από τα ισχυρότερα εργαλεία της κοσμολογίας καθώς απεικονίζει το Σύμπαν στο πολύ πρώιμο στάδιο της εποχής επανασύνδεσης.

Πειραματικά η ακτινοβολία υποβάθρου ανακαλύφθηκε τυχαία από τους Wilson και Penzias (βραβείο Nobel Φυσικής 1978) το 1964, ενώ η θερητική της πρόβλεψη είχε συμβεί την προηγούμενη δεκαετία ως φυσικό επακόλουθο των σχετικιστικών θεωριών.

Η ακτινοβολία υποβάθρου είναι εξαιρετικά ομογενής. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που υποδηλώνει πως τα φωτόνια από τις διαφορετικές μεριές του ουρανού ήταν στο παρελθόν σε θερμική ισορροπία, ένα φαινόμενο που δημιουργεί το πρόβλημα του ορίζοντα (κεφάλαιο 11). Ωστόσο οι σύγχρονες έρευνες δείχνουν ότι υπάρχουν μικρές αποκλίσεις από την ομοιογένεια, της

τάξης του $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$, δηλαδή η θερμοκρασία του CMB έχει μικρές αποκλίσεις από τη μετρούμενη τιμή $T(\theta, \phi) = T_0 + \delta T(\theta, \phi)$.

Ως γνωστόν η πυκνότητα της ακτινοβολίας φθίνει ως a^{-4} , ενώ η πυκνότητα της ύλης ως a^{-3} . Σε συνδυασμό με τη σχέση (213), γράφουμε:

$$\begin{aligned}\rho_m &\propto T^3 \\ \frac{\delta \rho_m}{\rho_m} &\approx 3 \frac{\delta T}{T} \\ \rho_r &\propto T^4 \\ \frac{\delta \rho_r}{\rho_r} &\approx 4 \frac{\delta T}{T}\end{aligned}$$

για τις διαταραχές στην πυκνότητα της ύλης και της ακτινοβολίας δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{\delta \rho_m}{\rho_m} = \frac{3}{4} \frac{\delta \rho_r}{\rho_r} \quad (216)$$

Κοσμική Ακτινοβολία Νετρίνων

Εκτός από την κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου, κατά την πυρηνοσύνθεση παράγεται η ακτινοβολία νετρίνων. Τα νετρίνα κατά την παραγωγή τους είναι πολύ θερμά και αλληλεπιδρούν με την ύλη μόνο μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Ωστόσο, καθώς το σύμπαν ψύχεται, ο ρυθμός της αλληλεπίδρασης μειώνεται ταχύτατα και τα νετρίνα αποδεσμεύονται από το πλάσμα πολύ πιο σύντομα από τα φωτόνια δημιουργώντας την κοσμική ακτινοβολία νετρίνων CνB. Τα νετρίνα διασχίζουν το Σύμπαν ελεύθερα από την εποχή της αποδέσμευσής τους, ενώ η θερμοκρασία τους ακολουθεί αυτή των φωτονίων ως:

$$T_\nu = \left[\frac{4}{11} \right]^{1/3} T_\gamma \quad (217)$$

Τα νετρίνα έχουν μη μηδενική μάζα και συνεπώς τη σημερινή εποχή συμπεριφέρονται ως ψυχρή ύλη, παρόλο που αρχικά συμπεριφέρονταν ως ακτινοβολία. Ωστόσο, εξαιτίας της μικρής τους μάζας, η συνεισφορά τους στη συνολική πυκνότητα της ύλης είναι αμεληταία: $\Omega_\nu \sim 10^{-5}$. Η ανίχνευση των πρώιμων νετρίνων είναι εξαιρετικά δύσκολη λόγω της πολύ χαμηλής θερμοκρασίας τους.