

X. Ευθυμιόπουλος, Ερευνητής Β'

3. Συντονισμοί και διάχυση στο δίκτυο Arnold (συνεργασία με Δρ. Μ. Χαρσούλα)

Το φαινόμενο της διάχυσης Arnold παρατηρείται σε μη-γραμμικά διατηρητικά δυναμικά συστήματα τριών ή περισσότερων βαθμών ελευθερίας, που αντιστοιχούν πρακτικά στις κινήσεις σωμάτων (μορίων, δορυφόρων, πλανητών ή αστερών) στο χώρο τριών διαστάσεων. Η διάχυση Arnold ορίζεται ως μία μακροσκοπική διάχυση που μπορεί να συμβεί ακόμη και όταν τα συστήματα απέχουν πολύ λίγο από τη λεγόμενη ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας, την περίπτωση δηλαδή κατά την οποία υπάρχουν ακριβείς μαθηματικές ποσότητες (ολοκληρώματα) που φράσσουν την κίνηση και εμποδίζουν τη διάχυση των σωμάτων ασυμπτωτικά στο χρόνο.

Η αριθμητική μελέτη της διάχυσης Arnold έγινε δυνατή μόλις τα τελευταία χρόνια με την αύξηση της υπολογιστικής ισχύος που επιτρέπει να γίνονται υπολογισμοί τροχιών σε εξαιρετικά μεγάλα χρονικά διαστήματα (της τάξης των δεκαετομμυρίων περιόδων και άνω).

Σε παλαιότερη μελέτη του X. Ευθυμιόπουλου είχε προταθεί μία θεωρητική σχέση ανάμεσα στην τιμή του συντελεστού διάχυσης D , που είναι το φυσικό μέγεθος που ενδιαφέρει στις εφαρμογές, και στο μέγεθος του λεγόμενου υπολοίπου της κανονικής μορφής Birkhoff (remainder of the Birkhoff normal form), R , που είναι η ποσότητα την οποία μπορούμε πρακτικά να υπολογίσουμε. Σύμφωνα με τη εν λόγω θεωρητική πρόβλεψη, ο συντελεστής διάχυσης D συνδέεται με το υπόλοιπο R μέσω ενός νόμου δύναμης $D = R^p$, όπου η τιμή του εκθέτου p εξαρτάται από το πλήθος των ανεξάρτητων συντονισμών που διέπουν μία συγκεκριμένη περιοχή του χώρου της κίνησης των σωμάτων, δηλ. $p=3$ σε περιοχές απλού συντονισμού, και $p=2$ σε περιοχές διπλού συντονισμού.

Με συνεργασία των X. Ευθυμιόπουλου και Μ. Χαρσούλα, κατασκευάσαμε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο, βασιζόμενο σε ένα κοινώς χρησιμοποιούμενο σύστημα στη βιβλιογραφία (μοντέλο των Froeschlé, Guzzo και Lega), προκειμένου να ελέγξουμε την παραπάνω θεωρία. Οι υπολογισμοί έχουν ολοκληρωθεί. Το κύριο αποτέλεσμα είναι ότι η προταθείσα θεωρία της διάχυσης επιβεβαιώνεται πλήρως από τα αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία δίνουν την τιμή προσαρμογής $p=1.9$ σε περιοχές διπλού συντονισμού, πολύ κοντά δηλαδή στη τιμή $p=2$ που προέβλεπε η θεωρία. Το γεγονός αυτό ανοίγει τη δυνατότητα για να υπολογίζεται ποσοτικά ο συντελεστής διάχυσης χωρίς δαπανηρές υπολογιστικά ολοκληρώσεις τροχιών, γεγονός που έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Σχετικά βρισκόμαστε στο στάδιο της συγγραφής εργασίας σε διεθνές περιοδικό με κριτές (C. Efthymiopoulos and M. Harsoula, 2010: "Estimates of Arnold diffusion by the normal form remainder in doubly-resonant domains" (in preparation), ενώ τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν σε ομιλίες του X. Ευθυμιόπουλου στο εξωτερικό (βλ. ομιλίες) και στο εσωτερικό σεμινάριο ΚΕΑΕΜ (Ιούνιος 2010).